Solution de l'équation de la chaleur plus généralement de l'équation de diffusion (régime transitoire)

L'équation de diffusion est une équation aux dérivées partielles de type parabolique comptant un terme temporelle de diffusion. Je vais très brièvement introduire une technique de résolution utilisant la combinaison de la séparation des variables, du principe de superposition et de la décomposition du problème aux limites en problèmes plus simple.

L'équation de diffusion à N dimensions s'écrit :

$$\Delta T(\mathbf{x},t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-S(\mathbf{x})$$

$$\textit{Exemple 2D cartésien}\quad \Delta T(\mathbf{x},t)=\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y,t)}{\partial y^2}$$

$$\textit{Exemple 3D cartésien}\quad \Delta T(\mathbf{x},t)=\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T(x,y,z,t)}{\partial z^2}$$

$$\textit{Exemple nD cartésien}\quad \Delta T(\mathbf{x},t)=\frac{\partial^2 T(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)}{\partial {x_1}^2}+\frac{\partial^2 T(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)}{\partial {x_2}^2}+\cdots+\frac{\partial^2 T(x_1,x_2,\cdots,x_n,t)}{\partial {x_n}^2}$$

où δ est le coefficient de diffusivité (ou de diffusion) et S le terme de source présent dans l'espace.

Plus généralement cette équation dérive de l'équation de diffusion sous sa forme un peu plus générale :

$$div\left(\partial(\mathbf{x})\vec{\nabla}T(\mathbf{x},t)\right)-\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t}=-S(\mathbf{x})$$

en supposant que δ est le coefficient de diffusion (par exemple thermique) cette fois variant dans l'espace mais qui par hypothèse est le plus souvent constant dans l'espace.

Par la suite on examine les solutions sans présence de terme source, soit

$$\Delta T(\mathbf{x},t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial t}=0\quad \textit{avec } \delta \textit{ terme de diffusivité}\quad (\mathbf{x})\in\Omega \textit{ de frontière } \partial\Omega$$

$$C.L.\quad \alpha\, T(\mathbf{x},t)+\beta\left.\frac{\partial T(\underline{\mathbf{x}},t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=f_{\partial\Omega}(\mathbf{x})\quad C.I\quad T(\mathbf{x},0)=T_0(\mathbf{x})$$

Supposons que la solution cherchée le soit sous une forme séparable entre les variables d'espace et de temps $T(\mathbf{x},t)=U(\mathbf{x})W(t)$. *Alors cela conduit à résoudre un système d'une équation aux dérivées partielles sur les variables spatiales et une équation différentiel en t :*

$$\frac{\Delta U(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x})}-\frac{1}{\delta}\frac{W'(t)}{W(t)}=0\Rightarrow\frac{\Delta U(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x})}=\frac{1}{\delta}\frac{W'(t)}{W(t)}=-\pm\mu^2\Rightarrow\begin{cases}\Delta U(\mathbf{x})\pm\mu^2 U(\mathbf{x})=0\\ W'(t)\pm\delta\,\mu^2 W(t)=0\end{cases}$$

On voit que le cas de la valeur propre positive aboutit à la solution exponentielle en temps qui diverge, le coefficient de diffusivité étant positif dans les cas de physique considéré. On écarte donc cette hypothèse pour ne retenir que le cas d'une valeur propre négative soit :

$$\Delta U(\mathbf{x})+\mu^2 U(\mathbf{x})=0\quad et\quad W(t)=Exp\left(-\delta\,\mu^2 t\right)\quad ou\quad W(t)=Cste$$

La première équation aux dérivées partielles est la très classique équation de Helmholtz. Cette équation de Helmholtz est également obtenu lors de la séparation des variables de l'équation de propagation des ondes :

$$\Delta T(\mathbf{x},t)-\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 T(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}=0 \quad T(\mathbf{x},t)=U(\mathbf{x})W(t)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta U(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x})}-\frac{1}{\lambda^2}\frac{W''(t)}{W(t)}=0 \Rightarrow \frac{\Delta U(\mathbf{x})}{U(\mathbf{x})}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{W''(t)}{W(t)}=-\pm\mu^2 \Rightarrow \begin{cases}\Delta U(\mathbf{x})\pm\mu^2 U(\mathbf{x})=0\\ W''(t)\pm\lambda^2\ \mu^2 W(t)=0\end{cases}$$

$$Solution\ périodique\ dans\ le\ temp \Rightarrow W''(t)+\lambda^2\ \mu^2 W(t)=0 \Rightarrow W(t)=ACos(\lambda\ \mu\ t)+BSin(\lambda\ \mu\ t)$$

$$\Rightarrow \Delta U(\mathbf{x})+\mu^2 U(\mathbf{x})=0$$

Si les conditions aux limites présente un certain degré d'homogénéité (selon un des axes des coordonnées), il y a bon espoir de trouver une infinité dénombrables de valeurs propres discrètes du problème spatial de Helmholtz . La solution peut alors s'écrire :

$$\Delta U(\mathbf{x})+\mu_n^2 U(\mathbf{x})=0 \quad \mu_n>0 \Rightarrow T(\mathbf{x},t)=\sum_{n=1,+\infty} a_n\ U_{\mu_n^2}(\mathbf{x})\,e^{-\delta\,\mu_n^2 t}$$

Malheureusement cette approche s'avère trop directe car elle ne peut être appliqué selon toutes les conditions aux limites et la condition initiale imposée aux problèmes.

<u>Configuration n°1 - Les conditions aux limites du domaine sont indépendantes du temps</u>

Nous nous sommes d'emblée placé dans cette configuration où les conditions aux limites du domaine sont indépendantes du temps, alors deux cas se présentent :

Cas N°1 : Les conditions aux limites sont homogènes

Dans ce cas on applique le schéma de résolution précédent,

$$\Delta U(\mathbf{x})+\mu_n^2 U(\mathbf{x})=0 \quad C.L. \quad \alpha\ T(\mathbf{x},t)+\beta\left.\frac{\partial T(\mathbf{x},t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0 \Leftrightarrow \alpha\ U(\mathbf{x})+\beta\left.\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{x},t)=\sum_{n=1,+\infty} a_n\ U_{\mu_n^2}(x,y)\ e^{-\delta\mu_n^2 t}$$

où les coefficients a_n sont recherchés de telle manière qu'ils permettent de vérifier la condition initiale : $T(\mathbf{x},0)=\sum_{n=1,+\infty} a_n\ U_{\mu_n^2}(\mathbf{x})=T_0(\mathbf{x})$

Lorsque le problème aux limites homogènes admet une infinité de solutions à valeur propres définies, ces solutions forment en générale une base orthogonale dans l'espace fonctionnel des solutions recherchées. Il y a donc bon espoir de trouver la décomposition "spectrale" de la condition initiale. Dans ce cas on voit clairement que la solution trouvée tend uniformément vers zéro, qui est le régime permanent, solution du problème :

$$\Delta U(\mathbf{x})=0 \quad C.L. \quad \alpha\ U(\mathbf{x})+\beta\left.\frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=0 \Rightarrow U(\mathbf{x})\equiv 0 \quad \forall \mathbf{x}\in\Omega$$

C'est dans cette catégorie que l'on rapporte les problèmes de refroidissement.

Cas N°2 : Les conditions aux limites sont inhomogènes

Dans ce cas la solution peut être recherchée en décomposant la solution en une partie dîtes en régime transitoire et une partie en régime stationnaire.

$$T(\mathbf{x},t)=T_p(\mathbf{x})+T_t(\mathbf{x},t) \quad \begin{cases} C.L. \quad \alpha\, T(\mathbf{x},t)+\beta \left.\dfrac{\partial T(\underset{\rightarrow}{\mathbf{x}},t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f_{\partial\Omega}(\mathbf{x}) \\ C.I \quad T(\mathbf{x},0)=T_0(\mathbf{x}) \end{cases}$$

où T_p est solution du problème aux conditions aux limites inhomogènes

$$\Delta T_p(\mathbf{x})=0 \quad C.L. \quad \alpha\, T_p(\mathbf{x})+\beta \left.\frac{\partial T_p(\underset{\rightarrow}{\mathbf{x}})}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f_{\partial\Omega}(\mathbf{x})$$

et T_t solution du problème de diffusion aux conditions aux limites homogènes :

$$\Delta T_t(\mathbf{x},t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(\mathbf{x},t)}{\partial t}=0 \qquad \begin{cases} C.L. \quad \alpha\, T_t(\mathbf{x},t)+\beta \left.\dfrac{\partial T_t(\underset{\rightarrow}{\mathbf{x}},t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \\ C.I \quad T_t(\mathbf{x},0)=T_0(\mathbf{x})-T_p(\mathbf{x}) \end{cases}$$

Pour s'en convaincre il suffit de remplacer $T(\mathbf{x},t)=T_p(\mathbf{x})+T_t(\mathbf{x},t)$ *dans l'équation de départ et de décomposer les seules parties temporelle et permanente dans les conditions aux limites et les conditions initiales. La méthode a donc deux étapes, la première résoudre le problème de Laplace avec conditions aux limites inhomogènes et la seconde en injectant cette solution dans le problème temporel homogène (avec le bon espoir qu'il soit séparable et aboutisse à une solution calculable).*

Le schéma de résolution du problème transitoire devient « classique » :

$$T_t(\mathbf{x},t)=\sum_{n=1,+\infty} a_n\, U_{\mu_n^2}(x,y)\, e^{-\delta\mu_n^2 t} \quad \Delta U_{\mu_n^2}(\mathbf{x})+\mu_n^2 U_{\mu_n^2}(\mathbf{x})=0 \quad C.L. \quad \alpha\, U_{\mu_n^2}(\mathbf{x})+\beta \left.\frac{\partial U_{\mu_n^2}(\mathbf{x})}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}$$

Celui du problème stationnaire se rapporte aux méthodes de résolution du problème aux limites de l'équation de Laplace.

C'est dans cette catégorie que l'on rapporte les problèmes de réchauffement.

Configuration n°2 - Les conditions aux limites du domaine dépendent du temps et de l'espace

On fait alors appel aux résultats du théorème de Duhamel (une version tout du moins) :

Une version du Théorème ou principe de Duhamel appliqué aux éguations de diffusion homogène (sans terme source) (voir page 37 du Livre de H.S.Carslaw et J.C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids) :

Cas n°1 : température prescrite (condition de Dirichlet) à la surface dépendante de l'espace et du temps , ou flux prescrit (condition de Neumann) ou condition mixte de Robin

Si $T(x,t)=F(x,\lambda,t)$ *représente la solution dans un domaine d'un problème de diffusion avec une condition initiale (t=0) nulle* $T(x,0)=0$, *avec sur la frontière du domaine une condition fixée à la surface de la forme :*

$$T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(\vec{x},\lambda)\quad ou\quad \frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(\vec{x},\lambda)\quad ou\quad \alpha\frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}+\beta T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(\vec{x},\lambda)$$

alors la solution du problème où la condition initiale est nulle et la condition aux limites est :

$$T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(\vec{x},t)\quad ou\quad \frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(\vec{x},t)\quad ou\quad \alpha\frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}+\beta T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(\vec{x},t)$$

est donnée par l'intégrale :

$$T(\vec{x},t)=\int_0^t d\lambda\,\frac{\partial}{\partial t}F(\vec{x},\lambda,t-\lambda)$$

Cas n°2 : (condition de Dirichlet) à la surface, ou flux prescrit (condition de Neumann) ou condition mixte de Robin, dépendante uniquement du temps, simplification du problème

Si $T(x,t)=F(x,\lambda,t)$ *représente la solution dans un domaine d'un problème de diffusion avec une condition initiale (t=0) nulle* $T(x,0)=0$, *avec sur la frontière du domaine une condition indépendante de l'espace,*

$$T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(\lambda)\quad ou\quad \frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(\lambda)\quad ou\quad \alpha\frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}+\beta\,T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(\lambda)$$

alors la solution du problème où la condition initiale est nulle et la condition aux limites est :

$$T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(t)\quad ou\quad \frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(t)\quad ou\quad \alpha\frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}+\beta T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(t)$$

est donnée par l'intégrale : $T(\vec{x},t)=\int_0^t d\lambda\,\Phi(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}F(\vec{x},\lambda,t-\lambda)$ *où F(x,λ,t) est solution du problème normalisé :*

$$T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=1\quad ou\quad \frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=1\quad ou\quad \alpha\frac{d\,T(\underline{x},t)}{d\,n}+\beta\,T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=1$$

C'est la simplification du problème précédent avec $T(x,t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega}=\Phi(x,t)=\Phi(t)$

Dans cette configuration n°2 (cas n°1 ou n°2), on peut également décomposer la solution en deux sous-problèmes :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta T(\vec{x},t) - \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial t} = 0 \\ C.L. \quad \alpha \dfrac{dT(\vec{x},t)}{d\,n} + \beta\, T(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega} = \Phi(t) \\ C.I \quad T(\vec{x},0) = T_0(\vec{x}) \end{array}\right\} \rightarrow T(\vec{x},t) = T_u(\vec{x},t) + T_w(\vec{x},t)$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta T_u(\vec{x},t) - \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial T_u(\vec{x},t)}{\partial t} = 0 \\ C.L. \quad \alpha \dfrac{dT_u(\vec{x},t)}{d\,n} + \beta\, T_u(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega} = 0 \\ C.I \quad T_u(\vec{x},0) = T_0(\vec{x}) \end{array}\right. + \left\{\begin{array}{l} \Delta T_w(\vec{x},t) - \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial T_w(\vec{x},t)}{\partial t} = 0 \\ C.L. \quad \alpha \dfrac{dT_w(\vec{x},t)}{d\,n} + \beta\, T_w(\vec{x},t)\Big|_{\vec{x}\in\delta\Omega} = \Phi(t) \\ C.I \quad T_w(\vec{x},0) = 0 \end{array}\right.$$

La première solution $T_u(x,t)$ est un problème homogène de diffusion classique. Et c'est dans le deuxième problème $T_w(x,t)$ que l'on utilise les résultats du théorème de Duhamel.

Résolution de problème de diffusion en coordonnées cartésiennes 2D

Commençons simplement par un problème bidimensionnel sur un corps rectangulaire. L'équation de diffusion séparée entre les variables spatiales et la variable temporelle s'écrit :

$$\Delta U(x,y)+\mu^2 U(x,y)=0 \quad et \quad W(t)=e^{-\delta\,\mu^2 t} \quad ou \quad W(t)=B$$

$$U(x,y)=X(x)Y(y)\Rightarrow X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)+\mu^2 X(x)Y(y)=0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\mu^2 \Rightarrow (1) \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\mu^2+\nu^2\,;\beta'=\mu^2-\nu^2 \quad et \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\nu^2$$

$$(1.1)\ si\ \mu^2>\nu^2 \Rightarrow \beta'=\beta^2=\mu^2-\nu^2 \Rightarrow \mu^2=\nu^2+\beta^2\ et \begin{cases} X(x)=ACos[\beta\,x]+BSin[\beta\,x] \\ Y(y)=CCos[\nu\,y]+DSin[\nu\,y] \end{cases}$$

$$ou\ (1.2) \quad \mu^2<\nu^2 \Rightarrow \beta^2=\nu^2-\mu^2 \Rightarrow \mu^2=\nu^2-\beta^2\ et \begin{cases} X(x)=Ae^{-\beta x}+Be^{+\beta x} \\ Y(y)=CCos[\nu\,y]+DSin[\nu\,y] \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2) \quad \frac{X''(x)}{X(x)}=-\mu^2-\nu^2\,;\mu^2=\beta^2-\nu^2 \quad et \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}=+\nu^2 \Rightarrow \begin{cases} X(x)=ACos[\beta\,x]+BSin[\beta\,x] \\ Y(y)=Ce^{-\nu y}+De^{+\nu y} \end{cases}$$

Le choix pourrait se faire entre les trois solutions (1.1), (1.2) ou (2), mais il est guidé par les conditions aux limites et la condition initiale. Lorsque les conditions aux limites en x ou en y sont homogènes et du type le plus général :

$$C.L. \quad \alpha_{x1}\,X(x)+\beta_{x1}\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=0}=0 \quad C.L. \quad \alpha_{x2}\,X(x)+\beta_{x2}\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=l_x}=0$$

$$C.L. \quad \alpha_{y1}\,Y(y)+\beta_{y1}\left.\frac{dY(y)}{dy}\right|_{y=0}=0 \quad C.L. \quad \alpha_{y2}\,Y(y)+\beta_{y2}\left.\frac{dY(y)}{dy}\right|_{y=l_y}=0$$

Alors dans le cas 1.2 les équations linéaires à résoudre issues du respect de la condition aux limites en x sont de la forme :

$$X(x)=Ae^{-\beta x}+Be^{+\beta x} \Rightarrow X(0)=A+B \quad \frac{dX(x)}{dx}=\beta\left(-Ae^{-\beta x}+Be^{+\beta x}\right) \Rightarrow \frac{dX(0)}{dx}=\beta\left(B-A\right)$$

$$\alpha_{x1}\,X(x)+\beta_{x1}\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=0} \Rightarrow \alpha_{x1}\left(A+B\right)+\beta_{x1}\beta\left(B-A\right)=0$$

$$\alpha_{x2}\,X(x)+\beta_{x2}\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=l_x} \Rightarrow \alpha_{x2}\left(Ae^{-\beta l_x}+Be^{+\beta l_x}\right)+\beta_{x2}\beta\left(Be^{+\beta l_x}-Ae^{-\beta l_x}\right)=0$$

Ce système linéaire est non dégénéré et donne la solution A=B=0. Il en est de même avec le cas (2) pour les conditions aux limites sur l'axe y. Il ne reste donc finalement que le cas 1.1 où les deux fonctions en X et Y sont sinusoïdales.

Problème : *Rectangle soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes de température T_0.->problème de réchauffement*

$$\Delta T(x,y,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T(x,y,t)\big|_{x=0} = T(x,y,t)\big|_{x=l_x} = T(x,y,t)\big|_{y=0} = T(x,y,t)\big|_{y=l_y} = T_0$$

$$C.I \quad T(x,y,0) = 0$$

On est dans le cas n°2 pour l'axe des y, mais il est très facile de revenir au cas n°1, car la solution du régime permanent est triviale. En décomposant les parties transitoires et permanentes $T(x,y,t) = T_p(x,y) + T_t(x,y,t)$ *. La solution du régime permanent est par évidence $T_p(x,y)=T_0$.*

Et le régime transitoire est solution du problème suivant qui correspond au cas n°1 :

$$\Delta T_t(x,y,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(x,y,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T_t(x,y,t)\big|_{x=0} = T_t(x,y,t)\big|_{x=l_x} = T_t(x,y,t)\big|_{y=0} = T_t(x,y,t)\big|_{y=l_y} = 0$$

$$C.I \quad T_t(x,y,0) = -T_0$$

Comme on l'a vu, La seule possibilité de solution compatible avec les conditions aux limites homogènes et la configuration géométrique est :

$$\lambda_{x,n} = \frac{n\,\pi}{l_x} \quad \lambda_{y,m} = \frac{m\,\pi}{l_y} \quad T_t(x,y,t) = \sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\substack{n=\infty\\m=\infty}} B_{n,m} Sin(\lambda_{x,n}x) Sin(\lambda_{y,m}y) e^{-\delta\left(\lambda_{x,n}{}^2+\lambda_{y,m}{}^2\right)t}$$

$$C.I \quad T_t(x,y,0) = -T_0 \Rightarrow \sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\substack{n=\infty\\m=\infty}} B_{n,m} Sin(\lambda_{x,n}x) Sin(\lambda_{y,m}y) = -T_0$$

Grâce à l'orthogonalité des fonctions propres nous avons:

$$\lambda_{x,n} = \frac{n\,\pi}{l_x} \quad \lambda_{y,m} = \frac{m\,\pi}{l_y} \quad B_{n,m} = -T_0 \frac{\int_0^{l_x} dx\, Sin(\lambda_{x,n}x) \int_0^{l_y} dy\, Sin(\lambda_{y,m}y)}{\int_0^{l_x} dx\, \left(Sin(\lambda_{x,n}x)\right)^2 \int_0^{l_y} dy\, \left(Sin(\lambda_{y,m}y)\right)^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{l_x} dx\, \left(Sin(\lambda_{x,n}x)\right)^2 = \frac{l_x}{2} \quad \int_0^{l_y} dy\, \left(Sin(\lambda_{y,m}y)\right)^2 = \frac{l_y}{2} \quad \int_0^{l_x} dx\, Sin(\lambda_{x,n}x) = \frac{1-(-1)^n}{\lambda_{x,n}} \quad \int_0^{l_y} dy\, Sin(\lambda_{y,m}y) = \frac{1-(-1)^m}{\lambda_{y,m}}$$

$$B_{n,m} = 0 \; si \; pair \; ou \; m \; pair \quad B_{2n+1,2m+1} = -\frac{16T_0}{\lambda_{x,2n+1}\lambda_{y,2m+1} l_x l_y}$$

$$T_t(x,y,t) = -\frac{16T_0}{l_x l_y} \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{Sin(\lambda_{x,2n+1}x) Sin(\lambda_{y,2m+1}y)}{\lambda_{x,2n+1}\lambda_{y,2m+1}} e^{-\delta\left(\lambda_{x,2n+1}{}^2+\lambda_{y,2m+1}{}^2\right)t} avec \quad \lambda_{x,n} = \frac{(2n+1)\pi}{l_x} \quad \lambda_{y,m} = \frac{(2m+1)\pi}{l_y}$$

$$\Rightarrow T(x,y,t) = T_0 - \frac{16T_0}{l_x l_y} \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{Sin(\lambda_{x,2n+1}x) Sin(\lambda_{y,2m+1}y)}{\lambda_{x,2n+1}\lambda_{y,2m+1}} e^{-\delta\left(\lambda_{x,2n+1}{}^2+\lambda_{y,2m+1}{}^2\right)t}$$

<u>Problème :</u> *Rectangle soumis à des conditions initiales de température fixe T_0, et de conditions aux limites de Dirichlet homogènes -> problème de refroidissement.*

$$\Delta T(x,y,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T(x,y,t)\big|_{x=0} = T(x,y,t)\big|_{x=l_x} = T(x,y,t)\big|_{y=0} = T(x,y,t)\big|_{y=l_y} = 0$$

$$C.I \quad T_t(x,y,0) = T_0$$

On est directement dans le cas n°1, et selon les mêmes calculs que la solution précédente, nous avons:

$$\lambda_{x,n} = \frac{(2n+1)\pi}{l_x} \quad \lambda_{y,m} = \frac{(2m+1)\pi}{l_y} \quad T(x,y,t) = \frac{16T_0}{l_x l_y}\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=\infty}\frac{Sin(\lambda_{x,n}x)Sin(\lambda_{y,m}y)}{\lambda_{x,n}\lambda_{y,m}}e^{-\delta\left(\lambda_{x,n}{}^2+\lambda_{y,m}{}^2\right)t}$$

<u>Problème :</u> *Rectangle soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes de température T_0.->problème de réchauffement*

$$\Delta T(x,y,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T(x,y,t)\big|_{x=0} = T(x,y,t)\big|_{x=l_x} = T(x,y,t)\big|_{y=0} = 0 \quad T(x,y,t)\big|_{y=l_y} = T_0$$

$$C.I \quad T(x,y,0) = 0$$

On est dans le cas n°2 pour l'axe des y, mais il est très facile de revenir au cas n°1, car la solution du régime permanent est connue (voir précédemment exemple n°1)

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\,\pi}{l_x} \quad T_p(x,y) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=0,\infty}\frac{Sinh(\lambda_n y)\,Sin(\lambda_n x)}{(2n+1)\,Sinh(\lambda_n l_y)}$$

En décomposant les parties transitoires et permanentes $T(x,y,t) = T_p(x,y) + T_t(x,y,t)$*, on est amené à résoudre le problème pour le régime transitoire:*

$$\Delta T_t(x,y,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(x,y,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T_t(x,y,t)\big|_{x=0} = T_t(x,y,t)\big|_{x=l_x} = T_t(x,y,t)\big|_{y=0} = T_t(x,y,t)\big|_{y=l_y} = 0$$

$$C.I \quad T_t(x,y,0) = -T_p(x,y)$$

Comme on l'a vu, La seule possibilité de solution compatible avec les conditions aux limites homogènes et la configuration géométrique est :

$$\lambda_{x,n} = \frac{n\,\pi}{l_x} \quad \lambda_{y,m} = \frac{m\,\pi}{l_y} \quad \lambda_l = \frac{(2l+1)\,\pi}{l_x} \quad T_t(x,y,t) = \sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\substack{n=\infty\\m=\infty}} B_{n,m} Sin(\lambda_{x,n}x) Sin(\lambda_{y,m}y) e^{-\delta\left(\lambda_{x,n}{}^2+\lambda_{y,m}{}^2\right)t}$$

$$C.I \quad \Rightarrow \sum_{\substack{n=1\\m=1}}^{\substack{n=\infty\\m=\infty}} B_{n,m} Sin(\lambda_{x,n}x) Sin(\lambda_{y,m}y) = -\frac{4T_0}{\pi} \sum_{l=0,\infty} \frac{Sinh(\lambda_l y)\; Sin(\lambda_l x)}{(2l+1)\; Sinh(\lambda_l l_y)}$$

Dans le suite du calcul nous avons besoin de l'expression des intégrales indéfinies produit de fonction sinus et sinus hyperbolique :

$$\int dz\, e^{bz} Sin(cz) = \frac{e^{bz}\left(bSin(cz) - c\,Cos(cz)\right)}{b^2+c^2} \quad \int dz\, e^{-bz} Sin(cz) = \frac{e^{-bz}\left(-bSin(cz) - c\,Cos(cz)\right)}{b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow \int dz\, Sinh(bz) Sin(cz) = \frac{1}{2\left(b^2+c^2\right)}\left(e^{bz}\left(bSin(cz) - c\,Cos(cz)\right) + e^{-bz}\left(bSin(cz) + c\,Cos(cz)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \int dz\, Sinh(bz) Sin(cz) = \frac{\left(bSin(cz) Cosh(bz) - c\,Cos(cz) Sinh(bz)\right)}{\left(b^2+c^2\right)}$$

$$\int_0^{l_y} dy\; Sinh(\lambda_l y) Sin(\lambda_{y,m} y) = \left[\frac{\left(\lambda_l Sin(\lambda_{y,m}y) Cosh(\lambda_l y) - \lambda_{y,m}\, Cos(\lambda_{y,m}y) Sinh(\lambda_l y)\right)}{\left(\lambda_l{}^2 + \lambda_{y,m}{}^2\right)}\right]_0^{l_y} =$$

$$\int_0^{l_y} dy\; Sinh(\lambda_l y) Sin(\lambda_{y,m} y) = \frac{\lambda_l Sin(\lambda_{y,m} l_y) Cosh(\lambda_l l_y) - \lambda_{y,m}\, Cos(\lambda_{y,m} l_y) Sinh(\lambda_l l_y)}{\left(\lambda_l{}^2 + \lambda_{y,m}{}^2\right)}$$

$$Comme\; Sin(\lambda_{y,m} l_y) = 0 \quad et \quad Cos(\lambda_{y,m} l_y) = (-1)^m$$

$$\int_0^{l_y} dy\; Sin(\lambda_{y,m} y) Sinh(\lambda_l y) = \left[\frac{-\lambda_{y,m}\, Cos(\lambda_{y,m}y) Sinh(\lambda_l y)}{\left(\lambda_l{}^2 + \lambda_{y,m}{}^2\right)}\right]_0^{l_y} = -\frac{\lambda_{y,m}\,(-1)^m\, Sinh(\lambda_l l_y)}{\left(\lambda_l{}^2 + \lambda_{y,m}{}^2\right)}$$

Grâce à l'orthogonalité des fonctions propres nous avons:

$$\lambda_{x,n} = \frac{n\,\pi}{l_x} \quad \lambda_{y,m} = \frac{m\,\pi}{l_y} \quad \lambda_l = \frac{(2l+1)\,\pi}{l_x}$$

$$B_{n,m} = -\frac{4T_0}{\pi}\frac{1}{\int_0^{l_x} dx\,\left(Sin(\lambda_{x,n}x)\right)^2 \int_0^{l_y} dy\,\left(Sin(\lambda_{y,m}y)\right)^2}\sum_{l=0,\infty}\frac{\int_0^{l_x} dx\,Sin(\lambda_{x,n}x)Sin(\lambda_l x)\int_0^{l_y} dy\,Sin(\lambda_{y,m}y)Sinh(\lambda_l y)}{(2l+1)\,Sinh(\lambda_l l_y)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{l_x} dx\,\left(Sin(\lambda_{x,n}x)\right)^2 = \frac{l_x}{2} \quad \int_0^{l_y} dy\,\left(Sin(\lambda_{y,m}y)\right)^2 = \frac{l_y}{2}$$

$$\int_0^{l_x} dx\,Sin(\lambda_{x,n}x)Sin(\lambda_l x) = \frac{l_x}{2}\delta_{n,2l+1} \qquad \int_0^{l_y} dy\,Sin(\lambda_{y,m}y)Sinh(\lambda_l y) = -\frac{\lambda_{y,m}(-1)^m Sinh(\lambda_l l_y)}{\left(\lambda_l^{\,2}+\lambda_{y,m}^{\,2}\right)}$$

$$\Rightarrow B_{n,m} = 0 \quad si\ n \neq 2l+1 \quad B_{2l+1,m} = \frac{16T_0}{\pi\,l_x l_y}\frac{l_x}{2}\frac{\lambda_{y,m}(-1)^m Sinh(\lambda_l l_y)}{(2l+1)\,Sinh(\lambda_l l_y)\left(\lambda_l^{\,2}+\lambda_{y,m}^{\,2}\right)} = \frac{8T_0}{\pi\,l_y}\frac{(-1)^m\lambda_{y,m}}{(2l+1)\left(\lambda_l^{\,2}+\lambda_{y,m}^{\,2}\right)}$$

$$B_{2l+1,m} = \frac{8T_0}{\pi\,l_y}\frac{(-1)^m\lambda_{y,m}}{(2l+1)\left(\lambda_l^{\,2}+\lambda_{y,m}^{\,2}\right)}$$

$$T_t(x,y,t) = \frac{8T_0}{\pi\,l_y}\sum_{l=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m\lambda_{y,m}\,Sin(\lambda_l x)Sin(\lambda_{y,m}y)}{(2l+1)\left(\lambda_l^{\,2}+\lambda_{y,m}^{\,2}\right)}e^{-\delta\left(\lambda_l^{\,2}+\lambda_{y,m}^{\,2}\right)t}$$

$$avec \quad \lambda_l = \frac{(2l+1)\,\pi}{l_x} \quad \lambda_{y,m} = \frac{m\,\pi}{l_y}$$

$$\Rightarrow T(x,y,t) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{l=0,\infty}\frac{Sinh(\lambda_l y)\,Sin(\lambda_l x)}{(2l+1)\,Sinh(\lambda_l l_y)} + \frac{8T_0}{\pi\,l_y}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m\lambda_{y,m}\,Sin(\lambda_l x)Sin(\lambda_{y,m}y)}{(2l+1)\left(\lambda_l^{\,2}+\lambda_{y,m}^{\,2}\right)}e^{-\delta\left(\lambda_l^{\,2}+\lambda_{y,m}^{\,2}\right)t}$$

On remarque que la sommation sur les valeurs propres dans la direction x du problème transitoire se cale sur celle du problème stationnaire dans la même direction, c'est logique puisque l'homogénéité des conditions aux limites est identique dans cette direction. Par acquis de conscience, on peut vérifier que la valeur initiale tend bien uniformément vers zéro par un programme numérique :

$$T(x,y,0) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{l=0,\infty}\frac{Sinh(\lambda_l y)\,Sin(\lambda_l x)}{(2l+1)\,Sinh(\lambda_l l_y)} + \frac{8T_0}{\pi\,l_y}\sum_{l=0}^{l=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(-1)^m\lambda_{y,m}\,Sin(\lambda_l x)Sin(\lambda_{y,m}y)}{(2l+1)\left(\lambda_l^{\,2}+\lambda_{y,m}^{\,2}\right)}$$

$$avec \quad \lambda_l = \frac{(2l+1)\,\pi}{l_x} \quad \lambda_{y,m} = \frac{m\,\pi}{l_y}$$

$$T(x,y,0) \to 0\ lorsque\ l,m \to \infty$$

Résolution de problème de diffusion en coordonnées cartésiennes 3D

La séparation entre les variables spatiales et temporelle du problème tridimensionnel de diffusion sur un corps quadrangulaire, dont une solution non triviale compatible avec des conditions aux limites homogogènes des trois types (Dirichlet, Neumann ou Robin) exige des solutions sinusoïdales, donne :

$$\Delta U(x,y,z)+\mu^2 U(x,y,z)=0 \quad et\ W(t)=e^{-\delta\,\mu^2 t} \quad ou \quad W(t)=B$$

$$U(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\mu^2$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=-\mu^2+\nu^2+\lambda^2 \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}=-\nu^2 \quad \frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\lambda^2$$

$$Avec \quad \left.\begin{array}{l}\mu^2>\nu^2+\lambda^2\\ \beta=\sqrt{\nu^2+\lambda^2-\mu^2}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}X(x)=ACos(\beta\,x)+BSin(\beta\,x)\\ Y(y)=CCos(\nu\,y)+DSin(\nu\,y)\\ Z(z)=CCos(\lambda\,z)+DSin(\lambda\,z)\end{cases}$$

Lorsque les conditions aux limites en x,y ou z sont homogènes et du type le plus général :

$$C.L.\quad \beta_{x1}\,X(x)-\alpha_{x1}\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=0}=0 \quad C.L.\quad \beta_{x2}X(x)+\alpha_{x2}\left.\frac{dX(x)}{dx}\right|_{x=l_x}=0$$

$$C.L.\quad \beta_{y1}\,Y(y)-\alpha_{y1}\left.\frac{dY(y)}{dy}\right|_{y=0}=0 \quad C.L.\quad \beta_{y2}Y(y)+\alpha_{y2}\left.\frac{dY(y)}{dy}\right|_{y=l_y}=0$$

$$C.L.\quad \beta_{z1}\,Z(z)-\alpha_{z1}\left.\frac{dZ(z)}{dz}\right|_{z=0}=0 \quad C.L.\quad \beta_{z2}\,Z(z)+\alpha_{z2}\left.\frac{dZ(z)}{dz}\right|_{z=l_z}=0$$

Problème : *Cube soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes de température fixe T_0.->problème de réchauffement*

$$\Delta T(x,y,z,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t}=0$$

$$C.L.\quad T(x,y,z,t)\big|_{x=0}=T(x,y,z,t)\big|_{x=l_x}=T(x,y,z,t)\big|_{y=0}=T(x,z,y,t)\big|_{y=l_y}=T(x,y,z,t)\big|_{z=0}=T(x,y,z,t)\big|_{z=l_z}=T_0$$

$$C.I\quad T(x,y,z,0)=0$$

On est dans le cas n°2 pour pour toutes les conditions aux limites inhomogènes, mais il est très facile de revenir au cas n°1, car la solution du régime permanent est trivialement T_0. En décomposant les parties transitoires et permanentes $T(x,y,z,t)=T_p(x,y,z)+T_t(x,y,z,t)$. *La solution du régime permanent est $T_p(x,y,z)=T_0$. Et le régime transitoire est solution du problème suivant qui correspond au cas n°1 :*

$$\Delta T_t(x,y,z,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(x,y,z,t)}{\partial t}=0$$

$$C.L.\quad T_t(x,y,z,t)\big|_{x=0}=T_t(x,y,z,t)\big|_{x=l_x}=T_t(x,y,z,t)\big|_{y=0}=T_t(x,y,z,t)\big|_{y=l_y}=T(x,y,z,t)\big|_{z=0}=T(x,y,z,t)\big|_{z=l_z}=0$$

$$C.I\quad T_t(x,y,z,0)=-T_0$$

La solution s'écrit sous la forme d'une série à triple indice :

$$\lambda_{nx} = \frac{n_x\ \pi}{l_x} \quad \lambda_{ny} = \frac{n_y\ \pi}{l_y} \quad \lambda_{nz} = \frac{n_z\ \pi}{l_y}$$

$$T_t(x,y,z,t) = \sum_{n_x=0}^{n_x=\infty}\sum_{n_y=0}^{n_y=\infty}\sum_{n_z=0}^{n_z=\infty} B_{n_x,n_y,n_z} Sin(\lambda_{nx}x)Sin(\lambda_{ny}y)Sin(\lambda_{nz}z)e^{-\delta\left(\lambda_{2nx+1}{}^2+\lambda_{2ny+1}{}^2+\lambda_{2nz+1}{}^2\right)t}$$

$$C.I \quad T_t(x,y,z,0) = -T_0 \Rightarrow \sum_{n_x=0}^{n_x=\infty}\sum_{n_y=0}^{n_y=\infty}\sum_{n_z=0}^{n_z=\infty} B_{n_x,n_y,n_z} Sin(\lambda_{nx}x)Sin(\lambda_{ny}y)Sin(\lambda_{nz}z) = -T_0$$

Grâce à l'orthogonalité des fonctions propres sinusoïdales, il vient:

$$B_{n_x,n_y,n_z} = -T_0 \frac{\int_0^{l_x} dx\ Sin(\lambda_{nx}x)\int_0^{l_y} dy\ Sin(\lambda_{ny}y)\int_0^{l_z} dz\ Sin(\lambda_{nz}z)}{\int_0^{l_x} dx\ (Sin(\lambda_{nx}x))^2\int_0^{l_y} dy\ (Sin(\lambda_{ny}y))^2\int_0^{l_z} dz\ (Sin(\lambda_{nz}z))^2}$$

$$B_{n_x,n_y,n_z} = 0\ si\ n_x\ pair\ ou\ n_y\ pair\ ou\ n_z\ pair \quad B_{2n_x+1,2n_y+1,2n_z+1} = -\frac{64T_0}{\lambda_{2nx+1}\lambda_{2ny+1}\lambda_{2nz+1}l_x l_y l_z}$$

$$\Rightarrow T_t(x,y,t) = -\frac{64T_0}{l_x l_y l_z}\sum_{n_x=0}^{n_x=\infty}\sum_{n_y=0}^{n_y=\infty}\sum_{n_z=0}^{n_z=\infty}\frac{Sin(\lambda_{2nx+1}x)Sin(\lambda_{2ny+1}y)Sin(\lambda_{2nz+1}z)}{\lambda_{2nx+1}\lambda_{2ny+1}\lambda_{2nz+1}}e^{-\delta\left(\lambda_{2nx+1}{}^2+\lambda_{2ny+1}{}^2+\lambda_{2nz+1}{}^2\right)t}$$

$$avec \quad \lambda_{nx} = \frac{(2n_x+1)\pi}{l_x} \quad \lambda_{ny} = \frac{(2n_y+1)\pi}{l_y} \quad \lambda_{nz} = \frac{(2n_z+1)\pi}{l_z}$$

$$\Rightarrow T(x,y,t) = T_0 - \frac{64T_0}{l_x l_y l_z}\sum_{n_x=0}^{n_x=\infty}\sum_{n_y=0}^{n_y=\infty}\sum_{n_z=0}^{n_z=\infty}\frac{Sin(\lambda_{2nx+1}x)Sin(\lambda_{2ny+1}y)Sin(\lambda_{2nz+1}z)}{\lambda_{2nx+1}\lambda_{2ny+1}\lambda_{2nz+1}}e^{-\delta\left(\lambda_{2nx+1}{}^2+\lambda_{2ny+1}{}^2+\lambda_{2nz+1}{}^2\right)t}$$

Résolution de problème de diffusion en coordonnées cylindrique polaire (r,ϑ)

Sur un corps en disque circulaire, l'équation de diffusion séparée en coordonnées (r,ϑ) se présente sous la forme :

$$\frac{\partial^2 U(r,\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U(r,\theta)}{\partial \theta^2}+\mu^2 U(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)W(t)$$

$$et\ W(t)=e^{-\delta\mu^2 t} \quad ou \quad W(t)=B$$

$$\Rightarrow R''(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)+\frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)=-\mu^2 R(r)\Theta(\theta)$$

$$\Rightarrow r^2R''(r)\Theta(\theta)+r\,R'(r)\Theta(\theta)+R(r)\Theta''(\theta)=-\mu^2 r^2 R(r)\Theta(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{r^2R''(r)+r\,R'(r)}{R(r)}+\mu^2r^2+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{r^2R''(r)+r\,R'(r)+\mu^2r^2R(r)}{R(r)}=-\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\pm\lambda^2$$

$$\Rightarrow r^2R''(r)+r\,R'(r)+\left(\mu^2r^2-\pm\lambda^2\right)R(r)=0$$

$$\Theta''(\theta)\pm\lambda^2\Theta(\theta)=0$$

$$Cas\ 1:+\lambda^2$$

$$\Theta''(\theta)+\lambda^2\Theta(\theta)=0\Rightarrow\Theta(\theta)=A_\theta Cos(\lambda\theta)+B_\theta Sin(\lambda\theta)$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\mu^2-\frac{\lambda^2}{r^2}\right)R(r)=0 \quad équation\ de\ Bessel$$

$$R(r)=A_rJ_\lambda(\mu\,r)+B_rY_\lambda(\mu\,r)\ \ fonction\ de\ Bessel\ de\ première\ et\ deuxième\ espèce$$

$$Cas\ 2:\lambda^2=0$$

$$\Theta(\theta)=A_\theta\theta+B_\theta$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\mu^2R(r)=0\Rightarrow R(r)=A_rJ_0(\mu\,r)+B_rY_0(\mu\,r)\ fonction\ de\ Bessel\ de\ première\ et\ deuxième\ espèce$$

$$Cas\ 3:-\lambda^2$$

$$\Theta''(\theta)-\lambda^2\Theta(\theta)=0\Rightarrow\Theta(\theta)=A_\theta e^{\lambda\theta}+B_\theta e^{-\lambda\theta}$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\mu^2+\frac{\lambda^2}{r^2}\right)R(r)=0 \quad équation\ de\ Bessel$$

$$R(r)=A_rJ_0(i\mu\,r)+B_rY_0(i\mu\,r)\ fonction\ de\ Bessel\ de\ première\ et\ deuxième\ espèce$$

$$forme\ indéterminée\ en\ r=0$$

Pour le cas n°3 la solution en variable ϑ n'est pas périodique, car la conformation géométrique impose que la solution soit périodique $\Theta(\theta)=\Theta(\theta+2\pi)$ *lorsque le problème est posé sur tout l'intervalle des valeurs de ϑ, soit sur le disque complet. Pour un problème sur un secteur restreint du disque* $\theta\in[\theta_1,\theta_2]\subset[0,2\pi]$, *on pourrait penser a priori, qu'il n'en est pas de même, mais Les solutions de l'équation différentielle ordinaire en r se révèle indéterminée aux limites r=0. Le cas Concrètement seuls les cas 1 et 2 se révèlent exploitables. Pour ces derniers cas, comme exemple, une solution respectant une condition homogène radiale de Dirichlet sur un disque plein, donnent des valeurs propres strictement positives de la forme:*

$$J_n(\mu_m l_r)=0\Rightarrow 0<\mu_1<\mu_2...<\mu_n<...+\infty\Rightarrow e^{-\delta\mu_n{}^2t}\ décroissant\ en\ t$$

Exemple *: Disque circulaire soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes de température T_0.*

$$\Delta T(r,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t} = 0$$
$$C.L. \quad T(r,\theta,t)\big|_{r=l_r} = T_0$$
$$C.I \quad T(r,\theta,0) = 0$$

On est dans le cas n°2 dans la dimension radiale, mais il est très facile de revenir au cas n°1, car la solution du régime permanent est triviale. En décomposant les parties transitoires et permanentes $T(r,\theta,t) = T_p(r,\theta) + T_t(r,\theta,t)$. *La solution du régime permanent est par évidence $T_p(r,\vartheta)=T_0$. Et le régime transitoire est solution du problème suivant qui correspond au cas n°1 :*

$$\Delta T_t(r,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(r,\theta,t)}{\partial t} = 0$$
$$C.L. \quad T_t(r,\theta,t)\big|_{r=l_r} = 0$$
$$C.I \quad T_t(r,\theta,0) = -T_0$$

La seule possibilité de solution compatible avec les conditions aux limites homogènes et la configuration géométrique est une solution ne dépendant pas de l'angle ϑ (tout se passe comme si l'équation de Helmholtz n'est plus dépendante de ϑ, ce qui équivaut à fixer $\lambda=0$, cas n°2) : il faut donc aller la chercher dans la valeur propre $\lambda=0$ du problème de Helmholtz soit développer la solution sous la forme d'une série :

$$T_t(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\mu_n\, r)\, e^{-\delta\, \mu_n^2 t} \quad avec\ \mu_n\ tq\ J_0(\mu_n l_r) = 0$$

La condition initiale conduit à calculer les intégrales suivantes et la solution qui en découle :
$\mu_n\ tq\ J_0(\mu_n l_r) = 0$

$$C.I. \Rightarrow -T_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\mu_n\, r) \quad \int_0^{l_r} dr\, r\, J_0(\mu_n\, r) = \frac{1}{\mu_n^2}\left[rJ_1(r)\right]_0^{\lambda_n l_r} = \frac{l_r J_1(\mu_n l_r) - J_1(0)}{\mu_n} = \frac{l_r J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n}$$

$$\|\Phi_n(r)\|^2 = \int_0^{l_r} dr\, r\, \left(J_0(\mu_n\, r)\right)^2 = \left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{\Phi'_n(r)^2}{\mu_n^2} + \Phi_n(r)^2\right)\right]_0^{l_r} = \frac{l_r^2 J_1(\mu_n l_r)^2}{2}$$

$$A_n = -T_0 \frac{\int_0^{l_r} dr\, r\, J_0(\mu_n\, r)}{\int_0^{l_r} dr\, r\, \left(J_0(\mu_n\, r)\right)^2} = -T_0 \frac{2 l_r J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n l_r^2 J_1(\mu_n l_r)^2} = -\frac{2T_0}{l_r}\frac{1}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)} \Rightarrow T(r,t) = T_0 - \frac{2T_0}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n\, r)\, e^{-\delta\, \mu_n^2 t}}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}$$

Un problème de refroidissement donnerais immédiatement la solution :

$$\Delta T(r,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t} = 0$$
$$C.L. \quad T(r,\theta,t)\big|_{r=l_r} = 0$$
$$C.I \quad T_t(r,\theta,0) = T_0$$

$$T(r,t) = \frac{2T_0}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n\, r)\, e^{-\delta\, \mu_n^2 t}}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)} \quad avec\ \mu_n\ tq\ J_0(\mu_n l_r) = 0$$

Exemple *: Disque circulaire soumis à des conditions initiales de température fixe T_0, et de conditions aux limites de Robin homogènes.*

$$\Delta T(r,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad \alpha \frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial r} + \beta\, T(r,\theta,t)\Big|_{r=l_r} = 0$$

$$C.I \quad T(r,\theta,0) = T_0$$

Ici nous nous trouvons directement dans le cas n°1. La solution est également indépendante de l'angle ϑ et doit donc se présenter sous la forme d'une série de fonction de Bessel J_0 :

$$T(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\mu_n\, r)\, e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}$$

Le respect de la conditions aux limites de Robin donne les valeurs des valeurs propres du problème de Sturm-Liouville et le calcul des intégrales suivantes :

$$\mu_n \ tq \quad \alpha\, \mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\, J_0(\mu_n l_r)$$

$$C.I. \Rightarrow T_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n J_0(\mu_n\, r)$$

$$\int_0^{l_r} dr\, r\, J_0(\mu_n\, r) = \frac{1}{\mu_n^{\,2}}\left[r J_1(r)\right]_0^{\lambda_n l_r} = \frac{l_r J_1(\mu_n l_r) - J_1(0)}{\mu_n} = \frac{l_r J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n}$$

$$\left\|\Phi_n(r)\right\|^2 = \int_0^{l_r} dr\, r\, \left(J_0(\mu_n\, r)\right)^2 = \left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{\Phi'_n(r)^2}{\mu_n^{\,2}} + \Phi_n(r)^2\right)\right]_0^{l_r} = \frac{l_r^{\,2}}{2}\left(J_1(\mu_n l_r)^2 + J_0(\mu_n l_r)^2\right)$$

$$A_n = T_0 \frac{\int_0^{l_r} dr\, r\, J_0(\mu_n\, r)}{\int_0^{l_r} dr\, r\, \left(J_0(\mu_n\, r)\right)^2} = T_0 \frac{2 l_r J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n l_r^{\,2}\left(J_1(\mu_n l_r)^2 + J_0(\mu_n l_r)^2\right)} = \frac{2T_0}{l_r}\frac{J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n\left(J_1(\mu_n l_r)^2 + J_0(\mu_n l_r)^2\right)}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{2T_0}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n\left(J_1(\mu_n l_r)^2 + J_0(\mu_n l_r)^2\right)} J_0(\mu_n\, r)\, e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t} \qquad avec\ \mu_n\ tq\ \ \alpha\, \mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\, J_0(\mu_n l_r)$$

ou

$$T(r,t) = \frac{2\alpha\, \beta\, T_0}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n\, r)\, e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}}{J_0(\mu_n l_r)\left(\beta^2 + \alpha^2\, \mu_n^{\,2}\right)} \qquad avec\ \mu_n\ tq\ \ \alpha\, \mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\, J_0(\mu_n l_r)$$

ou

$$T(r,t) = \frac{2T_0}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\beta^2}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)\left(\beta^2 + \alpha^2\, \mu_n^{\,2}\right)} J_0(\mu_n\, r)\, e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t} \qquad avec\ \mu_n\ tq\ \ \alpha\, \mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\, J_0(\mu_n l_r)$$

Exemple *: Disque circulaire soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes de température* T_0.

$$\Delta T(r,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T(r,\theta)\Big|_{r=l_r} = \begin{cases} T_0 & \theta \in [0,\pi] \\ T_1 & \theta \in [\pi,2\pi] \end{cases}$$

$$C.I \quad T(r,\theta,0) = 0$$

On est dans le cas n°2 dans la dimension radiale, mais il est très facile de revenir au cas n°1, car la solution du régime permanent est triviale. En décomposant les parties transitoires et permanentes (en rajoutant le signe moins voir manipulation du cas n°2) $T(r,\theta,t) = T_p(r,\theta) - T_t(r,\theta,t)$. *La solution du régime permanent a déjà été calculée comme ceci :*

$$T_p(r,\theta) = \frac{T_0+T_1}{2} + \frac{2(T_0-T_1)}{\pi}\sum_{n=0,\infty}\frac{\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} Sin((2n+1)\theta)}{(2n+1)} = T_{pp}(r,\theta) + T_{pip}(r,\theta)$$

$$T_{pp}(r,\theta) = \frac{T_0+T_1}{2} \quad T_{pip}(r,\theta) = \frac{2(T_0-T_1)}{\pi}\sum_{n=0,\infty}\frac{\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} Sin((2n+1)\theta)}{(2n+1)}$$

Et le régime transitoire est solution du problème suivant qui correspond au cas n°1 :

$$\Delta T_t(r,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(r,\theta,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T_t(r,\theta,t)\Big|_{r=l_r} = 0$$

$$C.I \quad T_t(r,\theta,0) = T_p(r,\theta) = T_{pp}(r,\theta) + T_{pip}(r,\theta)$$

qui se développe sous la forme d'une série à double indice :

$$T_t(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} J_m(\mu_{n,m}\, r) e^{-\delta\, \mu_{n,m}{}^2 t}\left(A_{n,m} Cos(m\vartheta) + B_{n,m} Sin(m\vartheta)\right)$$

Le premier indice m est de nature angulaire, de valeur entière, et les fonctions propres seront déterminées par les conditions initiales du problème, le second indice n est de nature radiale et assure la nullité de la solution en r=l_r *:*

$$\mu_{n,m} \quad tq \quad J_m(\mu_{n,m}\, l_r) = 0 \quad m = 1,2,\ldots,+\infty$$

Voyons comment développer une solution en "séparant" le problème avec une condition initiale paire et impaire / l'axe des abscisses :

$$T_t(r,\theta,t) = T_{tp}(r,\theta,t) + T_{tip}(r,\theta,t)$$

$$C.I \quad T_{tp}(r,\theta,0) = T_{pp}(r,\theta) = \frac{T_0 + T_1}{2} \quad paire\,/\,axe\,des\,abscisses\,et\,indépendant\,de\,\theta$$

$$C.I \quad T_{tip}(r,\theta,0) = T_{pip}(r,\theta) = \frac{(T_0 - T_1)}{2}\frac{4}{\pi}\sum_{n=0,\infty}\frac{\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} Sin((2n+1)\theta)}{(2n+1)}$$

$$Deux\,propriétés\,de\,parité\,pour\,T_{pip}(r,\theta) \to T_{pip}(r,-\theta) = -T_{pip}(r,\theta) \quad et \quad T_{pip}(r,\pi-\theta) = T_{pip}(r,\theta)$$

$$Introduisons\,T_{tip}^{norm}(r,\theta,t)\,/\,T_{tip}(r,\theta,t) = \frac{(T_0 - T_1)}{2}T_{tip}^{norm}(r,\theta,t)$$

$$\Rightarrow T_{tip}^{norm}(r,-\theta,t) = -T_{tip}^{norm}(r,\theta,t) \quad et \quad T_{tip}^{norm}(r,\pi-\theta,t) = T_{tip}^{norm}(r,\theta,t)$$

La première solution possède une condition initiale qui ne dépend plus de l'angle ϑ, correspondant à une valeur unique m=0, soit celle déjà calculée dans l'exemple précédent :

$$T_{tp}(r,\vartheta,t) = T_{tp}(r,t) = \frac{T_0 + T_1}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\lambda_n\, r)\, e^{-\delta\,\lambda_n^2 t}}{\lambda_n J_1(\lambda_n l_r)} \quad avec\ \lambda_n\ tq\ J_0(\lambda_n l_r) = 0$$

Rappelons ici l'ensemble des fonctions propres angulaires à partir desquelles on peut développer une solution selon les propriétés des conditions initiales (ces dernière s'apparentent aux conditions aux limites du régime permanent sur le disque) :

$$(1) \quad f_\theta(\theta) = f_\theta(\pi-\theta) \Rightarrow Sin((2n+1)\theta) \quad paire\,/\,axe\,des\,ordonnées\,y$$

$$(2) \quad f_\theta(\theta) = f_\theta(-\theta) \Rightarrow Cos(n\theta) \quad paire\,/\,axe\,des\,abscisses\,x$$

$$(3) \quad f_\theta(\theta) = -f_\theta(\pi-\theta) \Rightarrow Cos((2n+1)\theta) \quad impaire\,/\,axe\,des\,ordonnées\,y$$

$$(4) \quad f_\theta(\theta) = -f_\theta(-\theta) \Rightarrow Sin(n\theta) \quad impaire\,/\,axe\,des\,abscisses\,x$$

La seconde solution correspond à une condition initiale impaire de type (1) et (4), en conséquence elle se développe avec les fonctions Sin((2m+1)ϑ).

$$T_{tip}(r,\theta,t) = \frac{T_0 - T_1}{2}T_{tip}^{norm}(r,\theta,t)$$

$$T_{tip}^{norm}(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} B_{n,2m+1} J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}\, r) e^{-\delta\,\mu_{n,2m+1}^2 t} Sin((2m+1)\vartheta) \quad tq \quad J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}\, l_r) = 0$$

Le respect de la condition initiale donne le calcul des intégrales suivantes :

$\mu_{n,2m+1}\ tq \quad J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}\ l_r)=0$

$$T_{tip}^{norm}(r,\theta,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}B_{n,2m+1}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}\ r)e^{-\delta\,\mu_{n,2m+1}{}^2 t}Sin\big((2m+1)\vartheta\big)$$

$$Posons\ \Phi_{n,2m+1}(r)=J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r) \quad \frac{\Phi_{n,2m+1}'(r)}{\mu_{n,2m+1}}=J_{2m+1}'(\mu_{n,2m+1}r)=\frac{2m+1}{\mu_{n,2m+1}r}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)-J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}r)$$

$$\frac{\Phi_{n,2m+1}'(l_r)}{\mu_{n,2m+1}}=-J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r) \quad \Theta_{2m+1}(\vartheta)=Sin((2m+1)\vartheta)\Rightarrow\left\|\Theta_{2m+1}(\vartheta)\right\|^2=\pi$$

$$\left\|\Phi_{n,2m+1}(r)\right\|^2=\left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{\Phi'_{n,2m+1}(r)^2}{\left(\mu_{n,2m+1}\right)^2}+\Phi_{n,2m+1}(r)^2\left(1-\frac{(2m+1)^2}{r^2\left(\mu_{n,2m+1}\right)^2}\right)\right)\right]_0^{l_r}=\frac{l_r{}^2}{2}\frac{\Phi'_{n,2m+1}(l_r)^2}{\left(\mu_{n,2m+1}\right)^2}=\frac{l_r{}^2\left(J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)\right)^2}{2}$$

$$C.I.\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}B_{n,2m+1}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}\ r)Sin\big((2m+1)\vartheta\big)=\frac{4}{\pi}\sum_{l=0,\infty}\frac{\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l+1}Sin\big((2l+1)\theta\big)}{(2l+1)}$$

$$B_{n,2m+1}=\frac{8}{\pi^2\,l_r{}^2\left(J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)\right)^2}\sum_{l=0,\infty}\frac{1}{(2l+1)l_r{}^{2l+1}}\int_0^{l_r}dr\ r^{2l+2}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)\int_0^{2\pi}d\theta\ Sin\big((2l+1)\theta\big)Sin\big((2m+1)\theta\big)$$

$$Comme\ \int_0^{2\pi}d\theta\ Sin\big((2l+1)\theta\big)Sin\big((2m+1)\theta\big)=\pi\delta_{l,m}\Rightarrow B_{n,2m+1}=\frac{8\int_0^{l_r}dr\ r^{2m+2}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)}{\pi\,l_r{}^{2m+3}(2m+1)\left(J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)\right)^2}$$

$$\int_0^{l_r}dr\ r^{2m+2}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)=\frac{1}{\mu_{n,2m+1}{}^{2m+3}}\int_0^{\mu_{n,2m+1}l_r}dz\ z^{2m+2}\ J_{2m+1}(z)$$

$$B_{n,2m+1}=\frac{8\ A_{n,2m+1}}{\pi\,l_r{}^{2m+3}(2m+1)\mu_{n,2m+1}{}^{2m+3}\left(J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)\right)^2} \quad r\to z\Rightarrow A_{n,2m+1}=\int_0^{\mu_{n,2m+1}l_r}dz\ z^{2m+2}\ J_{2m+1}(z)$$

$$T_{tip}^{norm}(r,\theta,t)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{A_{n,2m+1}}{l_r{}^{2m+3}(2m+1)\mu_{n,2m+1}{}^{2m+3}\left(J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)\right)^2}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)e^{-\delta\,\mu_{n,2m+1}{}^2 t}Sin\big((2m+1)\vartheta\big)$$

On peut utiliser les formules de dérivation des fonctions de Bessel pour calculer ces intégrales, et fort heureusement nous bénéficions d'un calcul très simple de l'intégrale, et nous en profitions pour donner d'autres formules d'intégrales indéfinies sur les fonctions de Bessel :

(1) $\int dz\, z^{\nu+1} J_\nu(z) = \left[z^{\nu+1} J_{\nu+1}(z)\right]$

D'autre part $\int dz\, zJ_\nu'(z) = \left[zJ_\nu(z)\right] - \int dz\, J_\nu(z)$ *intégration par partie*

$$J_\nu'(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) \Rightarrow \int dz\, zJ_\nu'(z) = \int dz\, z\left(J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z)\right) = \int dz\, zJ_{\nu-1}(z) - \nu \int dz\, J_\nu(z)$$

$$\Rightarrow \left[zJ_\nu(z)\right] - \int dz\, J_\nu(z) = \int dz\, zJ_{\nu-1}(z) - \nu \int dz\, J_\nu(z)$$

$$\Rightarrow \int dz\, zJ_{\nu-1}(z) = \left[zJ_\nu(z)\right] + (\nu-1)\int dz\, J_\nu(z)$$

(2) $\int dz\, zJ_\nu(z) = \left[zJ_{\nu+1}(z)\right] + \nu \int dz\, J_\nu(z)$

On obtient aussi avec $J_\nu'(z) = \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z)$

(3) $\int dz\, zJ_{\nu+1}(z) = -\left[zJ_\nu(z)\right] + (\nu+1)\int dz\, J_\nu(z) \Leftrightarrow \int dz\, zJ_\nu(z) = -\left[zJ_{\nu-1}(z)\right] + \nu \int dz\, J_{\nu-1}(z)$

D'autrepart

(4) $\int_0^x dz\, J_\nu(z) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} J_{\nu+2k+1}(x)$

Et enfin

(5) $\int dz\, z^\lambda J_\nu(z) = \left[z^\lambda J_{\nu+1}(z)\right] + (\nu+1-\lambda)\int dz\, z^{\lambda-1} J_{\nu+1}(z)$ *même procédé intégration par partie*

(6) $\int dz\, z^\lambda J_\nu(z) = -\left[z^\lambda J_{\nu-1}(z)\right] + (\nu-1+\lambda)\int dz\, z^{\lambda-1} J_{\nu-1}(z)$ *même procédé intégration par partie*

Il vient :

$$(1) \Rightarrow A_{n,2m+1} = \int_0^{\mu_{n,2m+1} l_r} dz\, z^{2m+2}\, J_{2m+1}(z) = \left(\mu_{n,2m+1} l_r\right)^{2m+2} J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1} l_r)$$

$$T_{tip}^{norm}(r,\theta,t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\left(\mu_{n,2m+1} l_r\right)^{2m+2} J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1} l_r)}{l_r^{2m+3}(2m+1)\mu_{n,2m+1}^{2m+3}\left(J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1} l_r)\right)^2} J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1} r) e^{-\delta\, \mu_{n,2m+1}^2 t} Sin\left((2m+1)\vartheta\right)$$

$$T_{tip}^{norm}(r,\theta,t) = \frac{8}{\pi\, l_r} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1} r) e^{-\delta\, \mu_{n,2m+1}^2 t} Sin\left((2m+1)\vartheta\right)}{(2m+1)\mu_{n,2m+1} J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1} l_r)} \quad avec \quad \mu_{n,2m+1} \quad tq \quad J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1} l_r) = 0$$

D'où la solution complète du problème :

$$T(r,\vartheta,t) = \frac{T_0+T_1}{2} + \frac{2(T_0-T_1)}{\pi} \sum_{n=0,\infty} \frac{\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} Sin\left((2n+1)\theta\right)}{(2n+1)} - \frac{T_0+T_1}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0(\lambda_n\, r)\, e^{-\delta\, \lambda_n^2 t}}{\lambda_n J_1(\lambda_n l_r)}$$

$$-\frac{4(T_0-T_1)}{\pi\, l_r} \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1} r) e^{-\delta\, \mu_{n,2m+1}^2 t} Sin\left((2m+1)\vartheta\right)}{(2m+1)\mu_{n,2m+1} J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1} l_r)}$$

avec λ_n *tq* $J_0(\lambda_n l_r) = 0$

et $\mu_{n,2m+1}$ *tq* $J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1} l_r) = 0$

Donnons ici un exemple plus général où l'on a réduit la condition aux limites en une condition aux limites impaires par rapport à l'axe des abscisses, dans le problème suivant : disque circulaire soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes :

$$\Delta T(r,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T(r,\theta)\big|_{r=l_r} = f_\theta(\theta) \quad avec \quad f_\theta(\theta) = -f_\theta(-\theta) \; et \; f_\theta(\pi-\theta) = f_\theta(\theta)$$

$$C.I \quad T(r,\theta,0) = 0$$

Toujours en décomposant les parties transitoires et permanentes (en rajoutant le signe moins voir manipulation du cas n°2) $T(r,\theta,t) = T_p(r,\theta) - T_t(r,\theta,t)$ *. La solution du régime permanent est comme suit:*

$$c_n = \int_0^\pi d\theta \; f_\theta(\theta) Sin\big((2n+1)\theta\big) \quad T_p(r,\theta) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0,\infty} c_n \left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} Sin\big((2n+1)\theta\big)$$

Et le régime transitoire est solution du problème suivant qui correspond au cas n°1 :

$$\Delta T_t(r,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(r,\theta,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T_t(r,\theta,t)\big|_{r=l_r} = 0$$

$$C.I \quad T_t(r,\theta,0) = T_p(r,\theta)$$

qui se développe sous la forme d'une série à double indice :

$$T_t(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} J_m(\mu_{n,m}\, r) e^{-\delta\, \mu_{n,m}{}^2 t}\big(A_{n,m} Cos(m\vartheta) + B_{n,m} Sin(m\vartheta)\big)$$

Le premier indice m est de nature angulaire, de valeur entière, et les fonctions propres sont déterminées par les conditions initiales du problème, le second indice n est de nature radiale et assure la nullité de la solution en r=l_r : $\mu_{n,m} \quad tq \quad J_m(\mu_{n,m}\, l_r) = 0 \quad m = 1,2,...,+\infty$ *. Du fait de la symétrie impaire/l'axe des abscisses et paire/l'axe des ordonnées de la condition initiale du problème transitoire, cette dernière se développe également avec les même fonctions angulaires, soit :*

$$\mu_{n,2m+1} \quad tq \quad J_m(\mu_{n,2m+1} l_r) = 0 \rightarrow T_t(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} B_{n,2m+1} J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1} r) e^{-\delta\, \mu_{n,2m+1}{}^2 t} Sin\big((2m+1)\vartheta\big)$$

Le respect de la condition initiale donne le calcul des intégrales suivantes:

$$Posons\ \Phi_{n,2m+1}(r) = J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r) \quad \Theta_{2m+1}(\vartheta) = Sin\big((2m+1)\vartheta\big) \Rightarrow \left\|\Theta_{2m+1}(\vartheta)\right\|^2 = \pi$$

$$et\ \left\|\Phi_{n,2m+1}(r)\right\|^2 = \frac{l_r^{\,2}\big(J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)\big)^2}{2}$$

$$C.I. \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} B_{n,2m+1}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)Sin(m\vartheta) = \frac{2}{\pi}\sum_{l=0,\infty} c_l\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2l+1} Sin\big((2l+1)\theta\big)$$

$$B_{n,2m+1} = \frac{4}{\pi^2\, l_r^{\,2}\big(J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)\big)^2}\sum_{l=0,\infty}\frac{c_l}{l_r^{\,2l+1}}\int_0^{l_r} dr\ r^{2l+2}\ J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)\int_0^{2\pi} d\theta\ Sin\big((2l+1)\theta\big)Sin\big((2m+1)\vartheta\big)$$

$$Or\ \int_0^{2\pi} d\theta\ Sin\big((2l+1)\theta\big)Sin\big((2m+1)\vartheta\big) = \pi\delta_{l,m} \Rightarrow B_{n,2m+1} = \frac{4\,c_l\int_0^{l_r} dr\ r^{2m+2}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)}{\pi\, l_r^{\,2m+3}\big(J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)\big)^2}$$

$$\int_0^{l_r} dr\ r^{2m+2}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r) = \frac{1}{\mu_{n,2m+1}^{\ 2m+3}}\int_0^{\mu_{n,2m+1}l_r} dz\ z^{2m+2}\ J_{2m+1}(z)$$

$$\int_0^{\mu_{n,2m+1}l_r} dz\ z^{2m+2}\ J_{2m+1}(z) = \big(\mu_{n,2m+1}l_r\big)^{2m+2}J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r) \Rightarrow \int_0^{l_r} dr\ r^{2m+2}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r) = \frac{J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)l_r^{\ 2m+2}}{\mu_{n,2m+1}}$$

$$B_{n,2m+1} = \frac{4\,c_m}{\pi\, l_r\mu_{n,2m+1}J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)} \qquad c_m = \int_0^{\pi} d\theta\ f_\theta(\theta)Sin\big((2m+1)\theta\big)$$

$$T_t(r,\theta,t) = \frac{4}{\pi\, l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{c_m}{\mu_{n,2m+1}J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)}J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)e^{-\delta\,\mu_{n,2m+1}^{\ 2}t}Sin\big((2m+1)\vartheta\big)$$

D'où la solution complète du problème :

$$T(r,\vartheta,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0,\infty} c_n\left(\frac{r}{l_r}\right)^{2n+1} Sin\big((2n+1)\theta\big) - \frac{4}{\pi\, l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{c_m J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}r)}{\mu_{n,2m+1}J_{2m+2}(\mu_{n,2m+1}l_r)}e^{-\delta\,\mu_{n,2m+1}^{\ 2}t}Sin\big((2m+1)\vartheta\big)$$

$$avec\ c_m = \int_0^{\pi} d\theta\ f_\theta(\theta)Sin\big((2m+1)\theta\big)$$

$$et \quad \mu_{n,2m+1} \quad tq \quad J_{2m+1}(\mu_{n,2m+1}l_r) = 0$$

<u>Solution du problème de la chaleur (refroidissement) sur un secteur angulaire à deux dimensions</u>

Sur un secteur de corps de géométrie circulaire à deux dimensions, les conditions aux limites homogène et la condition initiale d'un problème de refroidissement sont les suivantes :

$$\alpha_{1r}\frac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial r}+\beta_{1r}U(r,\theta,t)\Big|_{r=l_{r1}}=0 \quad \alpha_{2r}\frac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial r}+\beta_{2r}U(r,\theta,t)\Big|_{r=l_{r2}}=0$$
$$\frac{\alpha_{1\theta}}{r}\frac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial \theta}+\beta_{1\theta}U(r,\theta,t)\Big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad \frac{\alpha_{2\theta}}{r}\frac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial \theta}+\beta_{2\theta}U(r,\theta,t)\Big|_{\theta=\theta_2}=0$$
$$U(r,\theta,t)\big|_{t=0}=f(r,\theta)$$

Alors l'équation de diffusion séparée en coordonnées <u>(r,θ)</u> se présente sous la forme :

$$\frac{\partial^2 U(r,\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U(r,\theta)}{\partial \theta^2}+\mu^2 U(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)W(t) \quad W(t)=e^{-\delta\,\mu^2 t}$$
$$\Rightarrow\begin{cases} R''(r)+\dfrac{1}{r}R'(r)+\left(\mu^2-\dfrac{\lambda^2}{r^2}\right)R(r)=0 \Rightarrow R(r)=A_r J_\lambda(\mu\, r)+B_r Y_\lambda(\mu\, r) \\ \Theta''(\theta)+\lambda^2\Theta(\theta)=0 \Rightarrow \Theta(\theta)=A_\theta Cos(\lambda\theta)+B_\theta Sin(\lambda\theta) \end{cases}$$

Prenons un cas simple de conditions aux limites de Dirichlet de part et d'autre :

$$U(r,\theta,t)\big|_{r=l_{r1}}=0 \quad U(r,\theta,t)\big|_{r=l_{r2}}=0 \quad U(r,\theta,t)\big|_{\theta=\theta_1}=0 \quad U(r,\theta,t)\big|_{\theta=\theta_2}=0$$
$$U(r,\theta,t)\big|_{t=0}=f(r,\theta)$$

Alors les fonctions radiales et angulaires ont la forme suivante :

$$\begin{cases} R(r)=Y_\lambda(\mu\, l_{r1})J_\lambda(\mu\, r)-J_\lambda(\mu\, l_{r1})Y_\lambda(\mu\, r) \\ \Theta(\theta)=Sin(\lambda(\theta-\theta_1)) \end{cases}$$

Et les deux variables de séparation doivent avoir un spectre discret déterminés par la résolution du système d'équations transcendantales suivant :

$$\begin{cases} Sin(\lambda(\theta_2-\theta_1))=0 \Rightarrow \lambda_n=\dfrac{n\pi}{\theta_2-\theta_1} \quad n=1,2,\cdots,\infty \\ \mu_{n,m} \quad tel\ que \quad Y_{\lambda_n}(\mu_{n,m}\, l_{r1})J_{\lambda_n}(\mu_{n,m}\, l_{r2})-J_{\lambda_n}(\mu_{n,m}\, l_{r1})Y_{\lambda_n}(\mu_{n,m}\, l_{r2})=0 \quad m=1,2,\cdots,\infty \end{cases}$$

Prenons maintenant le cas de conditions aux limites homogène de Neumann sur l'ensemble du pourtour du domaine :

$$\left.\frac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial r}\right|_{r=l_{r1}}=0 \quad \left.\frac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial r}\right|_{r=l_{r2}}=0 \quad \left.\frac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_1}=0 \quad \left.\frac{\partial U(r,\theta,t)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_2}=0$$

$$U(r,\theta,t)\big|_{t=0}=f(r,\theta)$$

Alors les fonctions radiales et angulaires ont la forme suivante :

$$\begin{cases} R(r)=Y_\lambda'(\mu\, l_{r1})J_\lambda(\mu\, r)-J_\lambda'(\mu\, l_{r1})Y_\lambda(\mu\, r) \\ \Theta(\theta)=Cos(\lambda(\theta-\theta_1)) \end{cases}$$

Et les deux variables de séparation doivent avoir un spectre discret déterminé par la résolution du système d'équation transcendantale suivant :

$$\begin{cases} Sin(\lambda(\theta_2-\theta_1))=0 \Rightarrow \lambda_n=\dfrac{n\pi}{\theta_2-\theta_1} \quad n=1,2,\cdots,\infty \\ \mu_{n,m} \quad tel\ que \quad Y_{\lambda_n}'(\mu_{n,m}\, l_{r1})J_{\lambda_n}'(\mu_{n,m}\, l_{r2})-J_{\lambda_n}'(\mu_{n,m}\, l_{r1})Y_{\lambda_n}'(\mu_{n,m}\, l_{r2})=0 \quad m=1,2,\cdots,\infty \end{cases}$$

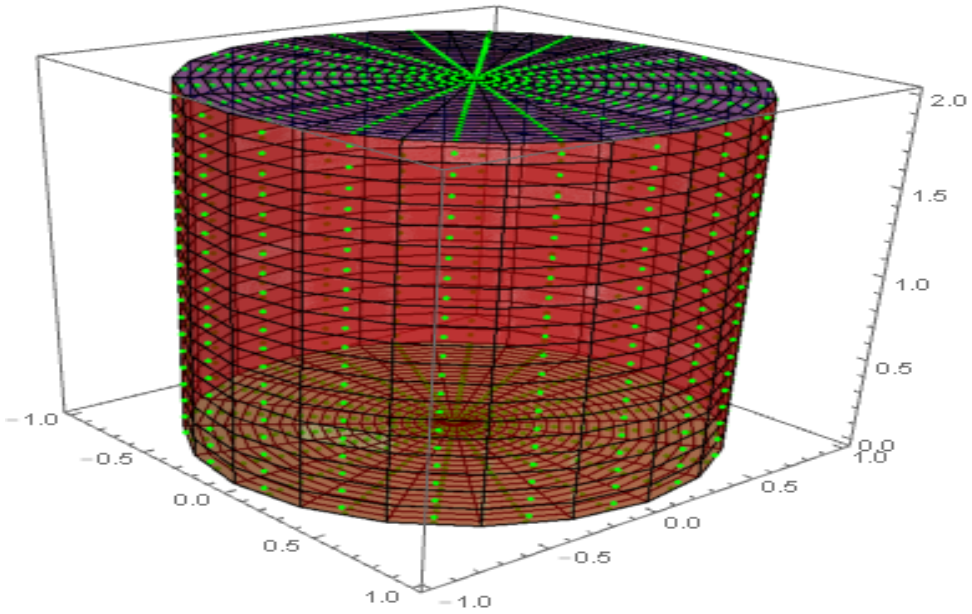
Ces deux exemples donnent une résolution assez simple du problème notamment la détermination du spectre de valeurs propres. Et la solution des deux problèmes de refroidissement (Dirichlet et Neumann) s'écrivent :

$$\begin{cases} \lambda_n=\dfrac{n\pi}{\theta_2-\theta_1} \quad n=1,2,\cdots,\infty \\ \mu_{n,m} \quad tel\ que \quad Y_{\lambda_n}(\mu_{n,m}\, l_{r1})J_{\lambda_n}(\mu_{n,m}\, l_{r2})-J_{\lambda_n}(\mu_{n,m}\, l_{r1})Y_{\lambda_n}(\mu_{n,m}\, l_{r2})=0 \quad m=1,2,\cdots,\infty \\ \begin{cases} R_{n,m}(r)=Y_{\lambda_n}(\mu\, l_{r1})J_{\lambda_n}(\mu\, r)-J_{\lambda_n}(\mu\, l_{r1})Y_{\lambda_n}(\mu\, r) \Rightarrow \|R_{n,m}(r)\|^2=\displaystyle\int_{l_{r1}}^{l_{r1}} dr\, r(R_{n,m}(r))^2 \\ \Theta_n(\theta)=Sin\left(n\pi\dfrac{\theta-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right) \Rightarrow \|\Theta_n(\theta)\|^2=\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\,(\Theta_n(\theta))^2=\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2} \end{cases} \\ T(r,\vartheta,t)=\dfrac{2}{\theta_2-\theta_1}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} c_{n,m}\dfrac{R_{n,m}(r)}{\|R_{n,m}(r)\|^2}Sin(\lambda(\theta-\theta_1))e^{-\delta\,\mu_{n,m}{}^2 t} \qquad avec\ c_{n,m}=\displaystyle\int_{l_{r1}}^{l_{r1}} dr\, r(R_{n,m}(r))^2\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\ f(r,\theta)Sin(\lambda_n(\theta-\theta_1)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_n=\dfrac{n\pi}{\theta_2-\theta_1} \quad n=1,2,\cdots,\infty \\ \mu_{n,m} \quad tel\ que \quad Y_{\lambda_n}'(\mu_{n,m}\, l_{r1})J_{\lambda_n}'(\mu_{n,m}\, l_{r2})-J_{\lambda_n}'(\mu_{n,m}\, l_{r1})Y_{\lambda_n}'(\mu_{n,m}\, l_{r2})=0 \quad m=1,2,\cdots,\infty \\ \begin{cases} R_{n,m}(r)=Y_{\lambda_n}'(\mu\, l_{r1})J_{\lambda_n}(\mu\, r)-J_{\lambda_n}'(\mu\, l_{r1})Y_{\lambda_n}(\mu\, r) \Rightarrow \|R_{n,m}(r)\|^2=\displaystyle\int_{l_{r1}}^{l_{r1}} dr\, r(R_{n,m}(r))^2 \\ \Theta_n(\theta)=Cos\left(n\pi\dfrac{\theta-\theta_1}{\theta_2-\theta_1}\right) \Rightarrow \|\Theta_n(\theta)\|^2=\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\,(\Theta_n(\theta))^2=\dfrac{\theta_2-\theta_1}{2} \end{cases} \\ T(r,\vartheta,t)=\dfrac{2}{\theta_2-\theta_1}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} c_{n,m}\dfrac{R_{n,m}(r)}{\|R_{n,m}(r)\|^2}Sin(\lambda(\theta-\theta_1))e^{-\delta\,\mu_{n,m}{}^2 t} \qquad avec\ c_{n,m}=\displaystyle\int_{l_{r1}}^{l_{r1}} dr\, r(R_{n,m}(r))^2\int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\ f(r,\theta)Cos(\lambda_n(\theta-\theta_1)) \end{cases}$$

.

Résolution de problème de diffusion en coordonnées cylindrique axi-symétrique (r,z)



Sur un corps axial symétrique, la séparation des variables en coordonnées (r,z) donne :

$$\frac{\partial^2 U(r,z)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U(r,z)}{\partial r}+\frac{\partial^2 U(r,z)}{\partial z^2}+\mu^2 U(r,z)=0 \quad T(r,z,t)=R(r)Z(z)W(t)$$

$$avec\ \mu^2>0\ et\ W(t)=e^{-\delta\,\mu^2 t} \quad ou \quad W(t)=B$$

$$\Rightarrow R''(r)Z(z)+\frac{1}{r}R'(r)Z(z)+R(r)Z''(z)+\mu^2 R(r)Z(z)=0$$

$$\Rightarrow rR''(r)Z(z)+R'(r)Z(z)+rR(r)Z''(z)+\mu^2 rR(r)Z(z)=0$$

$$\Rightarrow \frac{rR''(r)+R'(r)}{rR(r)}+\frac{Z''(z)+\mu^2 Z(z)}{Z(z)}=0 \Rightarrow \frac{rR''(r)+R'(r)}{rR(r)}=-\frac{Z''(z)+\mu^2 Z(z)}{Z(z)}=\pm\lambda^2$$

$$Cas\ 1:+\lambda^2$$

$$Z''(z)+\left(\mu^2+\lambda^2\right)Z(z)=0 \Rightarrow Z(z)=A_z Cos\left(z\sqrt{\mu^2+\lambda^2}\right)+B_z Sin\left(z\sqrt{\mu^2+\lambda^2}\right)$$

$$rR''(r)+R'(r)-\lambda^2\, rR(r)=0 \Rightarrow R(r)=A_r J_0\left(i\,\lambda\, r\right)+B_r Y_0\left(i\,\lambda\, r\right)\propto A_r I_0\left(\lambda\, r\right)+B_r K_0\left(\lambda\, r\right)$$

$$Cas\ 2:\lambda=0$$

$$Z''(z)+\mu^2 Z(z)=0 \Rightarrow Z(z)=A_z Cos\left(\mu\, z\right)+B_z Sin\left(\mu\, z\right)$$

$$rR''(r)+R'(r)=0 \Rightarrow R(r)=A_r Log(r)+B_r$$

$$Cas\ 3:-\lambda^2$$

$$Si\ \mu^2-\lambda^2>0 \Rightarrow Z''(z)+\left(\mu^2-\lambda^2\right)Z(z)=0 \Rightarrow Z(z)=A_z Cos\left(z\sqrt{\mu^2-\lambda^2}\right)+B_z Sin\left(z\sqrt{\mu^2-\lambda^2}\right)$$

$$Si\ \mu^2-\lambda^2<0 \Rightarrow Z''(z)-\left(\lambda^2-\mu^2\right)Z(z)=0 \Rightarrow Z(z)=A_z Cosh\left(z\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\right)+B_z Sinh\left(z\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\right)$$

$$rR''(r)+R'(r)+\lambda^2\, rR(r)=0 \Rightarrow R(r)=A_r J_0\left(\lambda\, r\right)+B_r Y_0\left(\lambda\, r\right)$$

Un petit commentaire est nécessaire :
- pour le cas n°2, dans le cas d'un cylindre plein, la partie radiale présente une singularité en r=0, conduisant au choix A_r=0, conduisant à une solution constante en r, inapte a représenter des problème dont les conditions aux limites sont homogènes en r, on écarte donc cette valeur
- pour le cas n°3, dans le cas d'un cylindre plein, pour respecter des conditions aux limites homogènes bilatérales (par exemple de Dirichlet), cela conduit à un jeu de valeur propres axiales $\lambda_{z,n}$ et si les valeurs propres radiales $\lambda_{r,m}$ sont également déterminées par des conditions homogènes sur r, alors il y a toujours la positivité du paramètre temporel assurant la décroissance du terme temporel :
$\sqrt{\mu^2 - \lambda_{r,m}{}^2} = \lambda_{z,n} \Rightarrow \mu^2 = \lambda_{z,n}{}^2 + \lambda_{r,m}{}^2 > 0$. *C'est ce cas qui doit être privilégié, car les indices ne sont aucunement limités, ce qui permet d'assurer la complétude des solutions construites.*
- pour le cas n°1, pour respecter des conditions aux limites homogènes bilatérales (par exemple de Dirichlet), cela conduit à un jeu de valeur propres axiales $\lambda_{z,n}$ et si les valeurs propres radiales $\lambda_{r,m}$ sont également déterminées par des conditions homogènes sur r alors cela implique que tous les indices axiales n et radiales m ne peuvent être utilisés dans le développement de la série, par la contrainte de décroissance du terme temporel, soit :
$\sqrt{\mu^2 + \lambda_{r,m}{}^2} = \lambda_{z,n} \Rightarrow \mu^2 = \lambda_{z,n}{}^2 - \lambda_{r,m}{}^2 > 0 \Rightarrow \quad \lambda_{z,n} > \lambda_{r,m}$. *Dans ces conditions la limitation du jeu des indices ne permet pas de s'assurer de la complétude de la solution construites.*

Exemple *: Cylindre plein (r,z) soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes de température* T_0.

Soit le problème de réchauffement avec conditions homogènes de Dirichlet sur la hauteur z :

$$\Delta T(r,z,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial t} = 0$$
$$C.L. \quad T(r,z)\big|_{r=l_r} = f_z(z)$$
$$C.L. \quad T(r,z)\big|_{z=0} = 0$$
$$C.L. \quad T(r,z)\big|_{z=l_z} = 0$$
$$C.I \quad T(r,z,0) = 0$$

On est dans le cas n°2 dans la dimension radiale, on revient au cas n°1 par la technique classique de décomposition en deux sous problèmes : $T(r,z,t) = T_p(r,z) + T_t(r,z,t)$

$$\begin{cases} C.L. \quad T_p(r,z)\big|_{r=l_r} = f_z(z) \\ C.L. \quad T_p(r,z)\big|_{z=0} = 0 \\ C.L. \quad T_p(r,z)\big|_{z=l_z} = 0 \end{cases} + \begin{cases} C.L. \quad T_t(r,z,t)\big|_{r=l_r} = 0 \\ C.L. \quad T_t(r,z,t)\big|_{z=0} = 0 \\ C.L. \quad T_t(r,z,t)\big|_{z=l_z} = 0 \\ C.I \quad T_t(r,z,0) = -T_p(r,z) \end{cases}$$

La solution du régime permanent a déjà été calculée comme ceci :

$$\nu_l = \frac{l\pi}{l_z} \quad C_l = \int_0^{l_z} dz\, f_z(z)\, Sin(\nu_l z) \quad T_p(r,z) = \frac{2}{l_z}\sum_{l=1,+\infty} \frac{C_l}{I_0(\nu_l l_r)} I_0(\nu_l r)\, Sin(\nu_l z)$$

Le régime transitoire se développe sous la forme d'une série à deux indices en utilisant le cas n°3 des équations séparées :

$$\lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n l_r) = 0 \quad et \quad \nu_m = \frac{m\pi}{l_z} \Rightarrow \mu_{n,m} = \sqrt{\nu_m{}^2 + \lambda_n{}^2}$$

$$T_t(r,z,t) = \frac{4}{l_z l_r{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} C_{n,m}\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n l_r)^2} Sin(\nu_m z) e^{-\delta\left(\nu_m{}^2+\lambda_n{}^2\right)t}$$

Fonctions propres

$$\Phi_m^z(z) = Sin(z\nu_m) \quad \Phi_n^r(r) = J_0(\lambda_n r) \quad \Phi'^r_n(r) = -\lambda_n J_1(\lambda_n r)$$

$$\left\|\Phi_m^z(z)\right\|^2 = \frac{l_z}{2} \quad \left\|\Phi_n^r(r)\right\|^2 = \int_0^{l_r} dr\, r\left(J_0(\lambda_n r)\right)^2 = \left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{\Phi'^r_n(r)^2}{\lambda_n{}^2} + \Phi_n^r(r)^2\right)\right]_0^{l_r} = \frac{l_r{}^2}{2} J_1(\lambda_n l_r)^2$$

$$\Rightarrow C_{n,m} = -\int_0^{l_z} dz\, Sin(\nu_m z)\int_0^{l_r} dr\, r\, T_p(r,z) J_0(\lambda_n r)$$

Il ne reste plus qu'à calculer le coefficient :

$$\nu_l = \frac{n\pi}{l_z} \quad C_l = \int_0^{l_z} dz\, f_z(z)\, Sin(\nu_l z) \quad T_p(r,z) = \frac{2}{l_z} \sum_{l=1,+\infty} \frac{C_l}{I_0(\nu_l l_r)} I_0(\nu_l r)\, Sin(\nu_l z)$$

$$C_{n,m} = -\int_0^{l_z} dz\, Sin(\nu_m z) \int_0^{l_r} dr\, r\, T_p(r,z) J_0(\lambda_n r) \quad \int_0^{l_z} dz\, Sin(\nu_m z)\, Sin(\nu_l z) = \frac{l_z}{2}\delta_{m,l}$$

$$C_{n,m} = -\frac{2}{l_z} \sum_{l=1}^{+\infty} \int_0^{l_z} dz\, Sin(\nu_m z)\, Sin(\nu_l z) \int_0^{l_r} dr\, r\, \frac{C_l}{I_0(\nu_l l_r)} I_0(\nu_l r) J_0(\lambda_n r)$$

$$C_{n,m} = -\frac{C_m}{I_0(\nu_m l_r)} \int_0^{l_r} dr\, r\, I_0(\nu_m r) J_0(\lambda_n r)$$

Calculons les intégrales :

Posons $\quad x = r^2 \Rightarrow dx = 2\,r\,dr \quad r = \sqrt{x}$

$$\int_0^{l_r} dr\, r\, I_0(\nu_m r) J_0(\lambda_n r) = \frac{1}{2} \int_0^{l_r^2} dx\, I_0(\nu_m \sqrt{x}) J_0(\lambda_n \sqrt{x})$$

$$Or \int_0^{l_r^2} dx\, I_0(a\sqrt{x}) I_0(b\sqrt{x}) = \left[\frac{2\sqrt{x}}{a^2 - b^2} \left(a\, I_0(b\sqrt{x}) I_1(a\sqrt{x}) - b\, I_1(b\sqrt{x}) I_0(a\sqrt{x}) \right) \right]_0^{l_r^2}$$

$$et \quad \int_0^{l_r} dx\, x\, I_0(a\,x) I_0(b\,x) = \left[\frac{x}{a^2 - b^2} \left(a\, I_0(b\,x) I_1(a\,x) - b\, I_0(a\,x) I_1(b\,x) \right) \right]_0^{l_r}$$

$$et \quad \int_0^{l_r^2} dx\, J_0(a\sqrt{x}) I_0(b\sqrt{x}) = \left[\frac{2\sqrt{x}}{a^2 + b^2} \left(b\, I_1(b\sqrt{x}) J_0(a\sqrt{x}) + a\, I_0(b\sqrt{x}) J_1(a\sqrt{x}) \right) \right]_0^{l_r^2}$$

$$et \quad \int_0^{l_r} dx\, x\, J_0(a\,x) I_0(b\,x) = \left[\frac{x}{a^2 + b^2} \left(b\, I_1(b\,x) J_0(a\,x) + a\, I_0(b\,x) J_1(a\,x) \right) \right]_0^{l_r}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_r^2} dx\, I_0(\nu_m \sqrt{x}) I_0(\lambda_n \sqrt{x}) = \left[\frac{l_r}{\nu_m^{\,2} - \lambda_n^{\,2}} \left(\nu_m I_0(\lambda_n l_r) I_1(\nu_m l_r) - \lambda_n I_1(\lambda_n l_r) I_0(\nu_m l_r) \right) \right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{l_r} dr\, r\, J_0(\lambda_n r) I_0(\nu_m r) = \left[\frac{l_r}{\lambda_n^{\,2} + \nu_m^{\,2}} \left(\nu_m\, I_1(\nu_m\, l_r) J_0(\lambda_n\, l_r) + \lambda_n\, I_0(\nu_m\, l_r) J_1(\lambda_n\, l_r) \right) \right] = \frac{l_r \lambda_n\, I_0(\nu_m\, l_r) J_1(\lambda_n\, l_r)}{\lambda_n^{\,2} + \nu_m^{\,2}}$$

$$C_{n,m} = -\frac{C_m}{I_0(\nu_m l_r)} \int_0^{l_r} dr\, r\, J_0(\lambda_n r)\, I_0(\nu_m r) \Rightarrow C_{n,m} = -\frac{l_r \lambda_n J_1(\lambda_n\, l_r) C_m}{\lambda_n^{\,2} + \nu_m^{\,2}}$$

La solution complète s'écrit donc :

$$\lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n l_r) = 0 \quad et \quad \nu_m = \frac{m\pi}{l_z} \quad et \quad C_l = \int_0^{l_z} dz\, f_z(z)\, Sin(\nu_l z)$$

$$T(r,z,t) = \frac{2}{l_z} \sum_{m=1,+\infty} \frac{C_m}{I_0(\nu_m l_r)} I_0(\nu_m r)\, Sin(\nu_m z) - \frac{4}{l_z l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} C_m \frac{\lambda_n}{\lambda_n^{\,2} + \nu_m^{\,2}} \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n l_r)}\, Sin(\nu_m z) e^{-\delta\left(\nu_m^{\,2} + \lambda_n^{\,2}\right)t}$$

Soit le problème de réchauffement avec conditions homogènes de Dirichlet sur la surface cylindrique :

$$\Delta T(r,z,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,z,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T(r,z)\big|_{r=l_r} = 0$$

$$C.L. \quad T(r,z)\big|_{z=0} = f_1(r)$$

$$C.L. \quad T(r,z)\big|_{z=l_z} = f_2(r)$$

$$C.I \quad T(r,z,0) = 0$$

On est dans le cas n°2 sur l'axe z, on revient au cas n°1 par la technique classique de décomposition en trois sous problèmes : $T(r,z,t) = T_{p1}(r,z) + T_{p2}(r,z) - T_t(r,z,t)$

$$\begin{cases} C.L. \quad T_{p1}(r,z)\big|_{r=l_r} = 0 \\ C.L. \quad T_{p1}(r,z)\big|_{z=0} = f_1(r) \\ C.L. \quad T_{p1}(r,z)\big|_{z=l_z} = 0 \end{cases} + \begin{cases} C.L. \quad T_{p2}(r,z)\big|_{r=l_r} = 0 \\ C.L. \quad T_{p2}(r,z)\big|_{z=0} = 0 \\ C.L. \quad T_{p2}(r,z)\big|_{z=l_z} = f_2(r) \end{cases} - \begin{cases} C.L. \quad T_t(r,z,t)\big|_{r=l_r} = 0 \\ C.L. \quad T_t(r,z,t)\big|_{z=0} = 0 \\ C.L. \quad T_t(r,z,t)\big|_{z=l_z} = 0 \\ C.I \quad T_t(r,z,0) = T_{p1}(r,z) + T_{p2}(r,z) \end{cases}$$

La solution du régime permanent a déjà été calculée comme ceci :

$$\lambda_n \ tq \ J_0(\lambda_n l_r) = 0$$

$$B_{1Jn} = \int_0^{l_r} dr\ r\ f_{r1}(r)\ J_0(\lambda_n r) \quad B_{2Jn} = \int_0^{l_r} dr\ r\ f_{r2}(r)\ J_0(\lambda_n r)$$

$$T_{p1}(r,z) = \frac{2}{l_r^{\ 2}} \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_{1Jn}\ Sinh\big(\lambda_n\ (l_z - z)\big) J_0(\lambda_n r)}{Sinh(\lambda_n l_z) J_1^{\ 2}(\lambda_n l_r)}$$

$$T_{p2}(r,z) = \frac{2}{l_r^{\ 2}} \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{B_{2Jn}\ Sinh(\lambda_n\ z) J_0(\lambda_n r)}{Sinh(\lambda_n l_z) J_1^{\ 2}(\lambda_n l_r)}$$

$$T_p(r,z) = T_{p1}(r,z) + T_{p2}(r,z) = \frac{2}{l_r^{\ 2}} \sum_{n\neq 0,+\infty} \frac{J_0(\lambda_n r)}{Sinh(\lambda_n l_z) J_1^{\ 2}(\lambda_n l_r)} \Big(B_{1Jn}\ Sinh\big(\lambda_n\ (l_z - z)\big) + B_{2Jn}\ Sinh(\lambda_n\ z)\Big)$$

Le régime transitoire se développe sous la forme d'une série à deux indices en utilisant le cas n°3 des équations séparées :

$$\lambda_n \quad tq \quad J_0(\lambda_n l_r)=0 \quad et \quad \nu_m=\frac{m\pi}{l_z} \Rightarrow \mu_{n,m}=\sqrt{\nu_m{}^2+\lambda_n{}^2}$$

Fonctions propres

$$\Phi_m^z(z)=Sin(z\nu_m) \quad \Phi_n^r(r)=J_0(\lambda_n r) \quad \Phi'^r_n(r)=-\lambda_n J_1(\lambda_n r)$$

$$\left\|\Phi_m^z(z)\right\|^2=\frac{l_z}{2} \quad \left\|\Phi_n^r(r)\right\|^2=\int_0^{l_r} dr\, r\left(J_0(\lambda_n r)\right)^2=\left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{\Phi'^r_n(r)^2}{\lambda_n{}^2}+\Phi_n^r(r)^2\right)\right]_0^{l_r}=\frac{l_r{}^2}{2}J_1(\lambda_n l_r)^2$$

$$\Rightarrow T_t(r,z,t)=\frac{4}{l_z l_r{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}C_{n,m}\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n l_r)^2}Sin(\nu_m z)e^{-\delta\left(\nu_m{}^2+\lambda_n{}^2\right)t}$$

$$\Rightarrow C_{n,m}=\int_0^{l_z} dz\, Sin(\nu_m z)\int_0^{l_r} dr\, r\, T_p(r,z)J_0(\lambda_n r)$$

$$T_p(r,z)=\frac{2}{l_r{}^2}\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{J_0(\lambda_l r)}{Sinh(\lambda_l l_z)J_1{}^2(\lambda_l l_r)}\left(B_{1Jl}\, Sinh(\lambda_l\,(l_z-z))+B_{2Jl}\, Sinh(\lambda_l\, z)\right)$$

$$\Rightarrow C_{n,m}=\frac{2}{l_r{}^2}\sum_{l\neq 0,+\infty}\frac{\int_0^{l_z} dz\,\left(B_{1Jl}\, Sinh(\lambda_l\,(l_z-z))+B_{2Jl}\, Sinh(\lambda_l\, z)\right)Sin(\nu_m z)\int_0^{l_r} dr\, r\, J_0(\lambda_l r)J_0(\lambda_n r)}{Sinh(\lambda_l l_z)J_1{}^2(\lambda_l l_r)}$$

$$Comme \int_0^{l_r} dr\, r\, J_0(\lambda_l r)J_0(\lambda_n r)=\frac{l_r{}^2}{2}J_1{}^2(\lambda_n l_r)\delta_{n,l} \Rightarrow C_{n,m}=\frac{\int_0^{l_z} dz\,\left(B_{1Jn}\, Sinh(\lambda_n\,(l_z-z))+B_{2Jn}\, Sinh(\lambda_n\, z)\right)Sin(\nu_m z)}{Sinh(\lambda_l l_z)}$$

$$C_{n,m}=\frac{1}{Sinh(\lambda_l l_z)}\left(B_{1Jn}\left(\int_0^{l_z} dz\, Sinh(\lambda_n(l_z-z))Sin(\nu_m z)\right)+B_{2Jn}\left(\int_0^{l_z} dz\, Sinh(\lambda_n z)Sin(\nu_m z)\right)\right)$$

Calculons le coefficient $C_{n,m}$:

$$C_{n,m}=\frac{1}{Sinh(\lambda_l l_z)}\left(B_{1Jn}\left(\int_0^{l_z} dz\, Sinh(\lambda_n(l_z-z))Sin(\nu_m z)\right)+B_{2Jn}\left(\int_0^{l_z} dz\, Sinh(\lambda_n z)Sin(\nu_m z)\right)\right)$$

$$\int_0^{l_z} dz\, Sinh(\lambda_n z)Sin(\nu_m z)=-\frac{\nu_m(-1)^m Sinh(\lambda_n l_z)}{\lambda_n{}^2+\nu_m{}^2} \quad et \quad \int_0^{l_z} dz\, Sinh(\lambda_n(l_z-z))Sin(\nu_m z)=\frac{\nu_m Sinh(\lambda_n l_z)}{\lambda_n{}^2+\nu_m{}^2}$$

$$\Rightarrow C_{n,m}=\frac{\nu_m}{\lambda_n{}^2+\nu_m{}^2}\left(B_{1Jn}-(-1)^m B_{2Jn}\right)=\frac{m\pi}{l_z\left(\lambda_n{}^2+\nu_m{}^2\right)}\left(B_{1Jn}-(-1)^m B_{2Jn}\right)$$

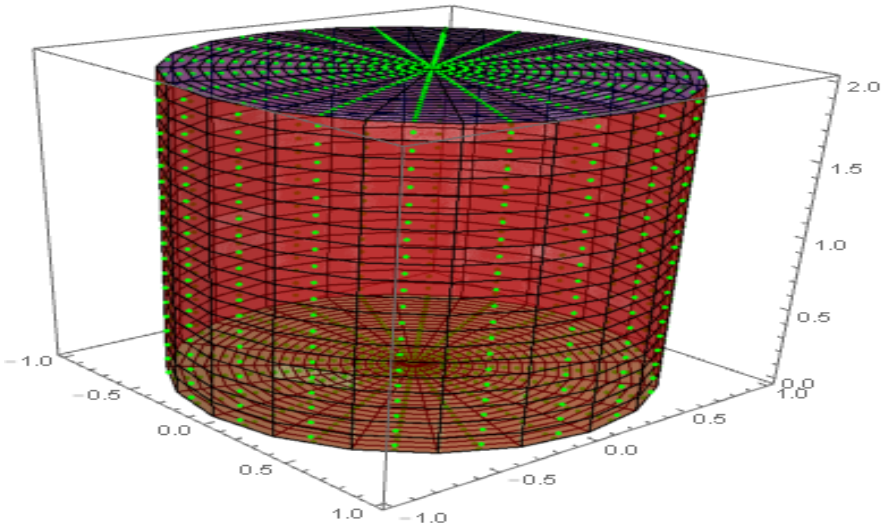
La solution complète est donc :

$$\lambda_n\ tq\ J_0(\lambda_n l_r)=0 \quad et \quad \nu_m=\frac{m\pi}{l_z} \quad B_{1Jn}=\int_0^{l_r} dr\, r\, f_{r1}(r)\, J_0(\lambda_n r) \quad B_{2Jn}=\int_0^{l_r} dr\, r\, f_{r2}(r)\, J_0(\lambda_n r)$$

$$T(r,z)=\frac{2}{l_r{}^2}\sum_{n\neq 0,+\infty}\frac{J_0(\lambda_n r)}{Sinh(\lambda_n l_z)J_1{}^2(\lambda_n l_r)}\left(B_{1Jn}\, Sinh(\lambda_n\,(l_z-z))+B_{2Jn}\, Sinh(\lambda_n\, z)\right)$$

$$-\frac{4\pi}{l_z{}^2 l_r{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{m\left(B_{1Jn}-(-1)^m B_{2Jn}\right)}{\lambda_n{}^2+\nu_m{}^2}\frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n l_r)^2}Sin(\nu_m z)e^{-\delta\left(\nu_m{}^2+\lambda_n{}^2\right)t}$$

Résolution de problème de diffusion en coordonnées cylindrique (r,ϑ,z)



L'équation de diffusion séparée en coordonnées (r,ϑ,z) se présente sous la forme :

$$\frac{\partial^2 U(r,\theta,z)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U(r,\theta,z)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U(r,\theta,z)}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 U(r,\theta,z)}{\partial z^2}+\mu^2 U(r,\theta,z)=0$$

$$T(r,\theta,z,t)=R(r)\Theta(\theta)Z(z)W(t) \quad et \quad W(t)=e^{-\delta\,\mu^2 t}$$

$$\Rightarrow R''(r)\Theta(\theta)Z(z)+\frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta)Z(z)+\frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta)Z(z)+R(r)\Theta(\theta)Z''(z)=-\mu^2 R(r)\Theta(\theta)Z(z)$$

$$\Rightarrow \frac{r^2R''(r)+r\,R'(r)}{R(r)}+\mu^2r^2+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\lambda_\theta^2 \qquad -\dfrac{Z''(z)}{Z(z)}=\lambda_z^2 \Rightarrow \begin{cases}\Theta(\theta)=A_\theta Cos(\lambda_\theta\theta)+B_\theta Sin(\lambda_\theta\theta)\\ Z(z)=A_z Cos(\lambda_z z)+B_z Sin(\lambda_z z)\end{cases} \\ \dfrac{r^2R''(r)+r\,R'(r)+\mu^2r^2R(r)}{R(r)}=\lambda_\theta^2+\lambda_z^2 \Rightarrow r^2R''(r)+r\,R'(r)+\left(\mu^2r^2-\lambda_\theta^2-\lambda_z^2\right)R(r)=0 \end{cases}$$

$$R''(r)+\frac{1}{r}R'(r)+\left(\mu^2-\frac{\lambda_\theta^2+\lambda_z^2}{r^2}\right)R(r)=0 \quad \textit{équation de Bessel} \quad \lambda=\sqrt{\lambda_\theta^2+\lambda_z^2}$$

$$R(r)=A_rJ_\lambda(\mu\,r)+B_rY_\lambda(\mu\,r) \quad \textit{fonction de Bessel de première et deuxième espèce}$$

Ici nous n'avons retenu que le cas des solutions sinusoïdales compatibles avec des conditions homogènes axiales et angulaires. Le cas des valeurs propres radiale ou angulaire nulles se ramène au cas des exemples précédents pour des coordonnées polaires ou axi-symétrique. Comme précédemment, une solution respectant une condition homogène radiale de Dirichlet sur un disque plein, par exemple, donnent des valeurs propres strictement positives de la forme:

$$J_\lambda(\mu_m l_r)=0 \Rightarrow 0<\mu_1<\mu_2\ldots<\mu_n<\ldots+\infty \Rightarrow e^{-\delta\mu_n{}^2 t} \ \textit{décroissant en } t$$

Exemple : soit le problème de refroidissement suivant correspondant au cas n°1 :

$$\Delta T(r,\theta,z,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,\theta,z,t)}{\partial t}=0$$

$$C.L.\quad T(r,\theta,z,t)\big|_{r=l_r}=0\quad T(r,\theta,z,t)\big|_{z=0}=0\quad T(r,\theta,z,t)\big|_{z=l_z}=0$$

$$C.I\quad T(r,\theta,z,0)=T_0(r,\theta,z)\quad tq\quad T_0(r,\theta,z)=T_0(r,\pi-\theta,z)\quad T_0(r,-\theta,z)=-T_0(r,\theta,z)$$

$$T_0(r,\theta,z)\ présente\ la\ symétrie\ Y+,X-$$

Comme la condition initiale présente la symétrie Y+,X-, la partie angulaire se développe comme une fonction sinusoïdale de la forme : $Sin((2n_\theta+1)\theta)$. *Dans ce cas la valeur propre angulaire est de la forme :* $\lambda_\theta=2n_\theta+1$. *La solution se développe sous la forme d'une série à triple indice :*

$$\lambda_\theta=2n_\theta+1\quad \lambda_z=\frac{n_z\pi}{l_z}\quad \lambda_r=\sqrt{\lambda_\theta^2+\lambda_z^2}\qquad \mu_{n_r,n_\theta,n_z}\quad tq\quad J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ l_r\right)=0$$

$$T(r,\theta,z,t)=\sum_{n_z=1}^{+\infty}\sum_{n_\theta=0}^{+\infty}\sum_{n_r=1}^{+\infty}B_{n_r,n_\theta,n_z}J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ r\right)Sin(\lambda_z z)Sin((2n_\theta+1)\theta)e^{-\delta\,\mu_{n_r,n_\theta,n_z}{}^2 t}$$

Le premier indice nz est axial, le deuxième est angulaire, de valeur entière, le troisième correspond à la suite de valeurs propres radiales obtenues en assure la nullité de la solution en r=l_r : $\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\quad tq\quad J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ l_r\right)=0$.

Le respect de la condition initiale donne le calcul des intégrales suivantes:

$$Posons\ \Theta_{2n_\theta+1}(\vartheta)=Sin((2n_\theta+1)\vartheta)\Rightarrow\left\|\Theta_{2n_\theta+1}(\vartheta)\right\|^2=\pi\quad Z_{n_z}(z)=Sin(\lambda_z z)\Rightarrow\left\|Z_{n_z}(z)\right\|^2=\frac{l_z}{2}$$

$$\Phi_{n_r,n_\theta,n_z}(r)=J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ r\right)\Rightarrow\frac{\Phi'_{n_r,n_\theta,n_z}(r)}{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}}=J_{\lambda_r}'\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}r\right)=\frac{\lambda_r}{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}r}J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}r\right)-J_{\lambda_r+1}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}r\right)$$

$$\Rightarrow\frac{\Phi'_{n_r,n_\theta,n_z}(l_r)}{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}}=-J_{\lambda_r+1}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r\right)\Rightarrow\left\|\Phi_{n_r,n_\theta,n_z}(r)\right\|^2=\left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{\Phi'_{n_r,n_\theta,n_z}(r)^2}{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}{}^2}+\Phi_{n,2m+1}(r)^2\left(1-\frac{\lambda_r{}^2}{r^2\mu_{n_r,n_\theta,n_z}{}^2}\right)\right)\right]_0^{l_r}$$

$$\Rightarrow\left\|\Phi_{n_r,n_\theta,n_z}(r)\right\|^2=\frac{l_r{}^2}{2}\left(\frac{\Phi'_{n_r,n_\theta,n_z}(l_r)}{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}}\right)^2=\frac{l_r{}^2\left(J_{\lambda_r+1}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r\right)\right)^2}{2}$$

$$C.I.\Rightarrow\sum_{n_z=1}^{+\infty}\sum_{n_\theta=0}^{+\infty}\sum_{n_r=1}^{+\infty}B_{n_r,n_\theta,n_z}J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ r\right)Sin(\lambda_z z)Sin((2n_\theta+1)\theta)=T_0(r,\theta,z)$$

$$\Rightarrow B_{n_r,n_\theta,n_z}=\frac{4}{\pi\ l_r{}^2 l_z}\frac{\int_0^{l_r}dr\ r\ J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ r\right)\int_0^{2\pi}d\theta\ Sin((2n_\theta+1)\vartheta)\int_0^{l_z}dz\ Sin(\lambda_z z)T_0(r,\theta,z)}{\left(J_{\lambda_r+1}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r\right)\right)^2}$$

$$Si\ T_0(r,\theta,z)=f(r)g(\theta)h(z)\Rightarrow \mathrm{A}_{n_r}=\int_0^{l_r}dr\ r\ f(r)J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ r\right)\quad \mathrm{B}_{n_\theta}=\int_0^{2\pi}d\theta\ g(\theta)Sin((2n_\theta+1)\vartheta)$$

$$\mathrm{C}_{n_z}=\int_0^{l_z}dz\ h(z)Sin(\lambda_z z)\quad \lambda_\theta=2n_\theta+1\quad \lambda_z=\frac{n_z\pi}{l_z}\quad \lambda_r=\sqrt{\lambda_\theta^2+\lambda_z^2}\quad \mu_{n_r,n_\theta,n_z}\quad tq\quad J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ l_r\right)=0$$

$$T_t(r,\theta,t)=\frac{4}{\pi\ l_r{}^2 l_z}\sum_{n_z=1}^{+\infty}\sum_{n_\theta=0}^{+\infty}\sum_{n_r=1}^{+\infty}\mathrm{A}_{n_r}\mathrm{B}_{n_\theta}\mathrm{C}_{n_z}\frac{J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ r\right)}{\left(J_{\lambda_r+1}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r\right)\right)^2}Sin(\lambda_z z)Sin((2n_\theta+1)\theta)e^{-\delta\,\mu_{n_r,n_\theta,n_z}{}^2 t}$$

.

Si la température initiale ne dépend pas de z, ni de r, alors il vient :

$$Si\ T_0(r,\theta,z)=g(\theta)\Rightarrow \mathrm{C}_{n_z}=\int_0^{l_z} dz\ Sin(\lambda_z z)=\frac{\left[Cos(\lambda_z z)\right]_{l_z}^{0}}{\lambda_z}=l_z\frac{1-(-1)^{n_z}}{n_z\pi}\quad \mathrm{C}_{2n_z+1}=\frac{2l_z}{(2n_z+1)\pi}$$

$$Comme\quad \int dz\ zJ_\nu(z)=\left[zJ_{\nu+1}(z)\right]+\nu\int dz\ J_\nu(z)\quad et\quad \int_0^x dz\ J_\nu(z)=2\sum_{k=0}^{+\infty}J_{\nu+2k+1}(x)$$

$$\mathrm{A}_{n_r}=\int_0^{l_r} dr\ r\ J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ r\right)=\frac{1}{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}{}^2}\int_0^{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r} dz\ z\ J_{\lambda_r}(z)=\frac{1}{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}{}^2}\left\{\left[zJ_{\lambda_r+1}(z)\right]_0^{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r}+\lambda_r\int_0^{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r} dz\ J_{\lambda_r}(z)\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{A}_{n_r}=\frac{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r J_{\lambda_r+1}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r\right)+2\lambda_r\sum_{k=0}^{+\infty}J_{\lambda_r+2k+1}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r\right)}{\mu_{n_r,n_\theta,n_z}{}^2}\quad \mathrm{B}_{n_\theta}=\int_0^{2\pi} d\theta\ g(\theta)Sin\left((2n_\theta+1)\vartheta\right)$$

$$\lambda_\theta=2n_\theta+1\quad \lambda_z=\frac{(2n_z+1)\pi}{l_z}\quad \lambda_r=\sqrt{\lambda_\theta^2+\lambda_z^2}=\frac{\sqrt{l_z{}^2(2n_\theta+1)^2+(2n_z+1)^2\pi^2}}{l_z}\quad \mu_{n_r,n_\theta,n_z}\quad tq\quad J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ l_r\right)=0$$

$$T_t(r,\theta,t)=\frac{8}{\pi^2\ l_r{}^2}\sum_{n_z=0}^{+\infty}\sum_{n_\theta=0}^{+\infty}\sum_{n_r=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{A}_{n_r}\mathrm{B}_{n_\theta}}{(2n_z+1)}\frac{J_{\lambda_r}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}\ r\right)}{\left(J_{\lambda_r+1}\left(\mu_{n_r,n_\theta,n_z}l_r\right)\right)^2}Sin\left((2n_z+1)z\right)Sin\left((2n_\theta+1)\theta\right)e^{-\delta\,\mu_{n_r,n_\theta,n_z}{}^2 t}$$

.

Équation de Laplace et équation de diffusion dans le cas d'un hyper-cylindre

Un hyper-cylindre à n+1 dimensions est construit de la manière suivante : c'est le produit cartésien d'une hyper-sphère de dimension n, avec une ligne de dimension 1. Cette ligne, assimilable à l'axe z, est la n-ième dimension, l'axe de symétrie de l'hyper-Cylindre. On suppose que le problème aux limites ne présente pas de dépendance aux coordonnées angulaires de l'hyper-sphère. Seuls le rayon et la hauteur demeure les variables du problème aux limites.

La séparation de l'équation de Laplace dans le cas d'un hyper-cylindre pour un problème aux limites axi-symétrique généralisé

Les équations séparées du problème de Laplace, indépendant de tous les angles donnent :

$$\text{Problème à} \quad n+1 \quad \text{dimensions} \quad n \geq 2 \quad \Delta = \sum_{l=1}^{l=n} \frac{\partial^2}{\partial x_l^{\,2}} + \frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^{\,2}} \Rightarrow x_{n+1} \to z$$

$$r = \sqrt{\sum_{l=1}^{l=n} x_l^{\,2}} \Rightarrow \Delta U(\vec{x}) = \frac{\partial^2 U(r,z)}{\partial r^2} + \left(\frac{n-1}{r}\right)\frac{\partial U(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 U(r,z)}{\partial z^2} = 0$$

$$U(r,z) = R(r)Z(z) \Rightarrow \begin{cases} R''(r)Z(z) + \dfrac{n-1}{r} R'(r)Z(z) + R(r)Z''(z) = 0 \\ \dfrac{R''(r)}{R(r)} + \dfrac{n-1}{r}\dfrac{R'(r)}{R(r)} = -\dfrac{Z''(z)}{Z(z)} = \pm\mu^2 \end{cases}$$

$$Cas - \mu^2 \quad \begin{cases} si\ n = 2 \Rightarrow R''(r) + \dfrac{1}{r} R'(r) + \mu^2 R(r) = 0 \quad et \quad Z''(z) - \mu^2 Z(z) = 0 \\ si\ n \geq 3 \Rightarrow R''(r) + \dfrac{n-1}{r} R'(r) + \mu^2 U(r) = 0 \quad et \quad Z''(z) - \mu^2 Z(z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z(z) = Ce^{\mu z} + De^{-\mu z} \\ U(r) = A\,J_0(\mu r) + B_0 Y_0(\mu r) \quad si\ n = 2 \\ U(r) = r^{\frac{2-n}{2}}\left(A\,J_{\frac{n-2}{2}}(\mu r) + B\,Y_{\frac{n-2}{2}}(\mu r)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{r}}\left(A\,J_{\frac{1}{2}}(\mu r) + B\,Y_{\frac{1}{2}}(\mu r)\right) = \dfrac{1}{r}\left(A\,Cos(\mu r) + B\,Sin(\mu r)\right) \quad si\ n = 3 \\ U(r) = r^{\frac{2-n}{2}}\left(A\,J_{\frac{n-2}{2}}(\mu r) + B\,Y_{\frac{n-2}{2}}(\mu r)\right) \quad si\ n \geq 4 \end{cases}$$

$$Cas + \mu^2 \quad \begin{cases} si\ n = 2 \Rightarrow R''(r) + \dfrac{1}{r} R'(r) - \mu^2 R(r) = 0 \quad et \quad Z''(z) + \mu^2 Z(z) = 0 \\ si\ n \geq 3 \Rightarrow R''(r) + \dfrac{n-1}{r} R'(r) - \mu^2 U(r) = 0 \quad et \quad Z''(z) + \mu^2 Z(z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z(z) = C\,Cos(\mu z) + D\,Sin(\mu z) \\ U(r) = A\,I_0(\mu r) + B_0 K_0(\mu r) \quad si\ n = 2 \\ U(r) = r^{\frac{2-n}{2}}\left(A\,I_{\frac{n-2}{2}}(\mu r) + B\,I_{\frac{n-2}{2}}(\mu r)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{r}}\left(A\,I_{\frac{1}{2}}(\mu r) + B\,K_{\frac{1}{2}}(\mu r)\right) = \dfrac{1}{r}\left(E\,e^{\mu r} + F\,e^{-\mu r}\right) \quad si\ n = 3 \\ U(r) = r^{\frac{2-n}{2}}\left(A\,I_{\frac{n-2}{2}}(\mu r) + B\,K_{\frac{n-2}{2}}(\mu r)\right) \quad si\ n \geq 4 \end{cases}$$

Équation de diffusion dans le cas d'un hyper-cylindre et sa séparation pour un problème aux limites axi-symétrique généralisé

Les équations séparées du problème de diffusion, indépendant de tous les angles donnent :

$$Problème\ à\quad n+1\quad dimensions\quad n\geq 2\quad \Delta=\sum_{l=1}^{l=n}\frac{\partial^2}{\partial x_l^{\ 2}}+\frac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^{\ 2}}\Rightarrow x_{n+1}\to z$$

$$r=\sqrt{\sum_{l=1}^{l=n}x_l^{\ 2}}\Rightarrow \Delta U(\vec{x},t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial U(\vec{x},t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 U(r,z,t)}{\partial r^2}+\left(\frac{n-1}{r}\right)\frac{\partial U(r,z,t)}{\partial r}+\frac{\partial^2 U(r,z,t)}{\partial z^2}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial U(\vec{x},t)}{\partial t}=0$$

$$U(r,z,t)=R(r)Z(z)W(t)\Rightarrow\begin{cases}R''(r)Z(z)W(t)+\dfrac{n-1}{r}R'(r)Z(z)W(t)+R(r)Z''(z)W(t)-\dfrac{1}{\delta}R(r)Z(z)W'(t)=0\\ W'(t)+\delta\lambda^2W(t)=0\Rightarrow W(t)=e^{-\delta\lambda^2 t}\\ \dfrac{R''(r)}{R(r)}+\dfrac{n-1}{r}\dfrac{R'(r)}{R(r)}+\lambda^2=-\dfrac{Z''(z)}{Z(z)}=\pm\mu^2\end{cases}$$

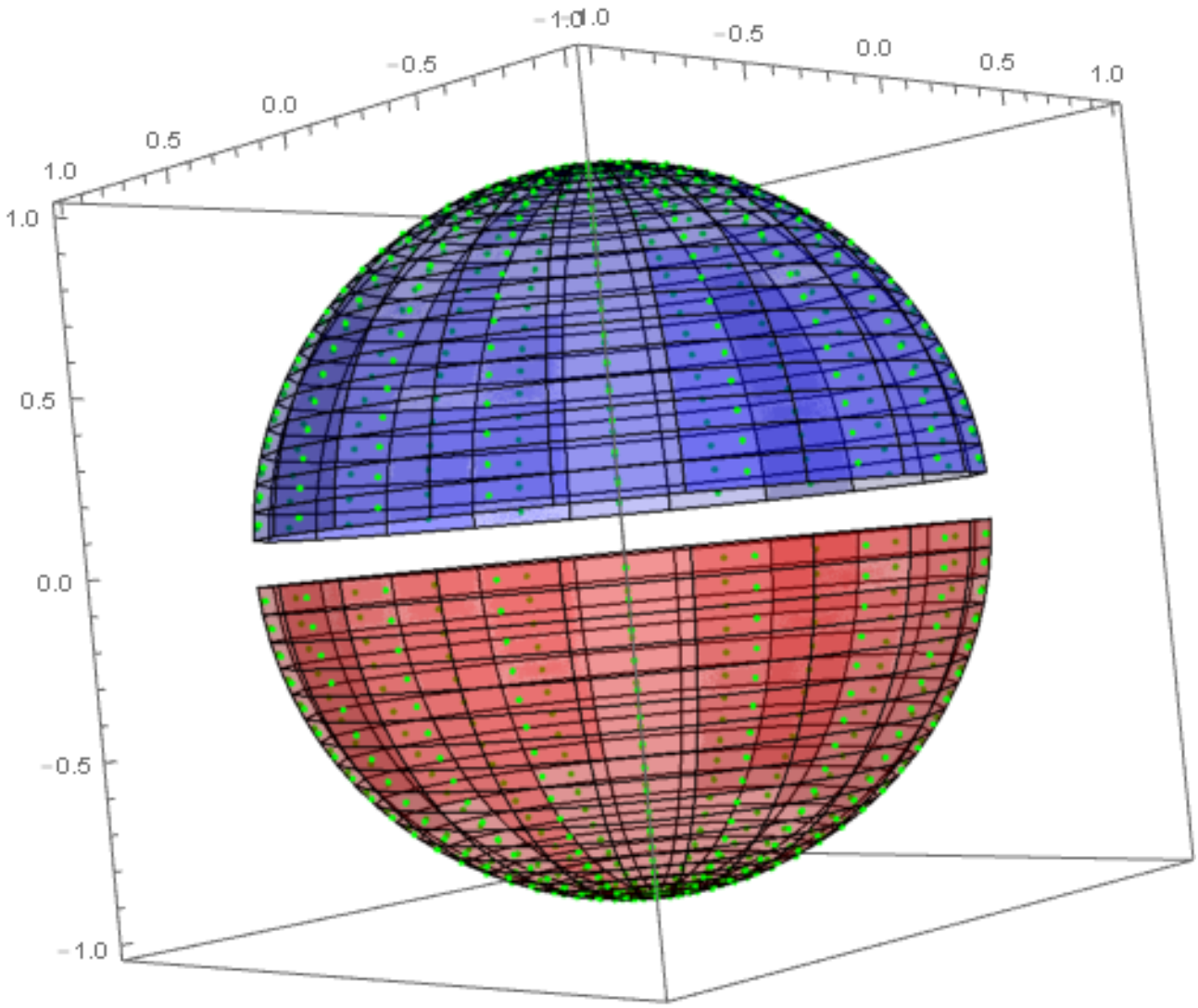
$$Cas-\mu^2\quad R''(r)+\frac{n-1}{r}R'(r)+\left(\mu^2+\lambda^2\right)U(r)=0\quad et\quad Z''(z)-\mu^2Z(z)=0$$

$$\begin{cases}Z(z)=Ce^{\mu z}+De^{-\mu z}\\ U(r)=A\,J_0\left(\sqrt{\mu^2+\lambda^2}\ r\right)+B_0Y_0\left(\sqrt{\mu^2+\lambda^2}\ r\right)\quad si\ n=2\\ U(r)=r^{\frac{2-n}{2}}\left(A\,J_{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{\mu^2+\lambda^2}\ r\right)+B\,Y_{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{\mu^2+\lambda^2}\ r\right)\right)\quad si\ n\geq 3\end{cases}$$

$$Cas+\mu^2\quad Seul\ cas\ possible\ \lambda^2-\mu^2>0\quad R''(r)+\frac{n-1}{r}R'(r)+\left(\lambda^2-\mu^2\right)U(r)=0\quad et\quad Z''(z)+\mu^2Z(z)=0$$

$$\begin{cases}Z(z)=C\,Cos(\mu z)+D\,Sin(\mu z)\\ U(r)=A\,J_0\left(\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\ r\right)+B_0Y_0\left(\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\ r\right)\quad si\ n=2\\ U(r)=r^{\frac{2-n}{2}}\left(A\,I_{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\ r\right)+B\,K_{\frac{n-2}{2}}\left(\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\ r\right)\right)\quad si\ n\geq 3\end{cases}$$

Résolution de problème de diffusion en coordonnées sphériques (r,ϑ, φ)



On se restreint au cas où la configuration géométrique du corps, des conditions aux limites et de la condition initiale sont soit indépendantes de ϑ et φ (corps sphérique), soit indépendantes de φ (corps sphérique de révolution axiale z), soit indépendante de r (variété surface de la sphère).

Les équations séparées du problème de Helmholtz indépendant de ϑ et φ (une dimension radiale) donnent :

$$U''(r)+\frac{2}{r}U'(r)+\mu^2U(r)=0 \quad T(r,t)=U(r)W(t) \quad et \quad W(t)=e^{-\delta\,\mu^2 t} \quad ou \quad W(t)=B$$

$$Posons \quad V(r)=rU(r)$$

$$V'(r)=rU'(r)+U(r) \quad V''(r)=rU''(r)+2U'(r)$$

$$U''(r)+\frac{2}{r}U'(r)+\mu^2U(r)=0 \Leftrightarrow V''(r)+\mu^2V(r)=0$$

$$\Rightarrow U(r)=\frac{1}{r}\left(A_r Cos(\mu\, r)+B_r Sin(\mu\, r)\right)$$

$$T(r,t)=\frac{e^{-\delta\,\mu^2 t}}{r}\left(A_r Cos(\mu\, r)+B_r Sin(\mu\, r)\right)$$

Les équations séparées du problème de Helmholtz indépendant de φ (deux dimensions, radiale, angulaire) donnent :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}Sin(\theta)\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial\theta}+\mu^2U(r,\theta)=0 \quad T(r,\theta,t)=R(r)\Theta(\theta)W(t)$$

$$et\; W(t)=e^{-\delta\,\mu^2 t} \quad ou \quad W(t)=B$$

$$cas\ général \Rightarrow \left|\begin{array}{l} R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)+\left(\mu^2-\frac{\alpha_2}{r^2}\right)R(r)=0 \\ \Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\alpha_2\Theta(\theta)=0 \end{array}\right.$$

$$si \quad \alpha_2=n(n+1) \;\; avec \quad n \quad entier,$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)+\left(\mu^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R(r)=0 \Rightarrow R(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_r J_{n+\frac{1}{2}}(\mu\, r)+B_r Y_{n+\frac{1}{2}}(\mu\, r)\right) \\ \Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+[n(n+1)]\Theta(\theta)=0 \Rightarrow \Theta(\theta)=A_\theta P_n(Cos(\theta))+B_\theta Q_n(Cos(\theta)) \end{array}\right.$$

$P_n(z)$ *Polynôme de Legendre de degré n* $\quad Q_n(z)$*Fonction de Legendre de deuxième espèce de degré n*

$$valeur\ propre\ nulle \rightarrow si\ \alpha_2=0 \Rightarrow R(r)=\frac{1}{r}\left(A\,Cos(\mu\, r)+B\,Sin(\mu\, r)\right);\ \Theta(\theta)=C_\theta+D_\theta\ Log[\frac{1-Cos(\theta)}{1+Cos(\theta)}]$$

Les équations séparées du problème de Helmholtz à trois dimensions donnent :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial r}+\frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}Sin(\theta)\frac{\partial U(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2 Sin(\theta)}\frac{\partial^2 U(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\mu^2 U(r,\theta,\varphi)=0$$

$$T(r,\theta,\varphi,t)=R(r)\Theta(\theta)W(t)\quad et\quad W(t)=e^{-\delta\mu^2 t}\quad ou\quad W(t)=B$$

$$cas\ général\Rightarrow\left|\begin{array}{l}R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)+\left(\mu^2-\frac{\alpha_2}{r^2}\right)R(r)=0\\ \Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\left(\alpha_2-\frac{\alpha_3}{Sin^2(\theta)}\right)\Theta(\theta)=0\\ \Psi''(\varphi)+\alpha_3\Psi(\varphi)=0\end{array}\right.$$

$$si\quad \alpha_2=n(n+1)\ \ avec\quad n\quad entier,\quad \alpha_3=m^2$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l}R''(r)+\frac{2}{r}R'(r)+\left(\mu^2-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R(r)=0\Rightarrow R(r)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_r J_{n+\frac{1}{2}}(\mu r)+B_r Y_{n+\frac{1}{2}}(\mu r)\right)\\ \Theta''(\theta)+\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta)=0\Rightarrow\Theta(\theta)=A_\theta P_n^m(Cos(\theta))+B_n^m Q_n(Cos(\theta))\\ \Psi(\varphi)=A_\varphi Cos(m\varphi)+B_\varphi Sin(m\varphi)\end{array}\right.$$

$P_n^m(z)$ *Fonction associée de Legendre de première espèce de degré n et d' ordre m*

$Q_n^m(z)$ *Fonction associée de Legendre de deuxième espèce de degré n et d' ordre m*

$J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ *Fonction de Bessel Sphérique*

Pour ce qui est des valeurs spéciales des constantes de séparation, lorsque α_3=0, on retombe dans le cas indépendant de l'angle azimutal φ, et lorsque α_2=α_3=0, il s'agit du cas d'un problème uniquement radial. Les valeurs de n et m sont entières dès lors que le problème aux limites concerne une sphère entière, car les fonctions de Legendre et Legendre associées, de degré n et d'ordre m sont les seuls dans ce cas à être régulières sur le domaine fermé angulaire en ϑ, φ. Elles forment par ailleurs un système de fonctions propres orthogonales pour ces paramètres n et m entiers.

Les équations séparées du problème de Helmholtz indépendant de r (deux dimensions angulaires) donnent :

R rayon de la sphère

$$\frac{1}{R^2 Sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sin(\theta)\frac{\partial U(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2 Sin(\theta)}\frac{\partial^2 U(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\mu^2 U(\theta,\varphi)=0 \quad T(\theta,\varphi,t)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)W(t)$$

$et\ W(t)=e^{-\delta\,\mu^2 t} \quad ou \quad W(t)=B$

cas général

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}\Theta''(\theta)+\dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\left[\mu^2R^2-\dfrac{\alpha_3}{Sin(\theta)}\right]\Theta(\theta)=0\\ \Phi''(\varphi)+\alpha_3\Phi(\varphi)=0\end{array}\right.$$

$si \quad \mu^2R^2=n(n+1)\ et\ \alpha_3=m^2 \quad avec \quad n,m \quad entier,$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}\Theta''(\theta)+\dfrac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}\Theta'(\theta)+\left[n(n+1)-\dfrac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right]\Theta(\theta)=0 \Rightarrow \Theta(\theta)=A_\theta P_n^m\big(Cos(\theta)\big)+B_\theta\, Q_n^m\big(Cos(\theta)\big)\ tq\ m<=n\\ \Phi''(\varphi)+m^2\Phi(\varphi)=0\\ avec\ \mu^2=\dfrac{n(n+1)}{R^2}\end{array}\right.$$

$P_n^m(z)$ *Fonction de Legendre de degré n et d'ordre m*

$Q_n^m(z)$*Fonction de Legendre de deuxième espèce de degré n et d'ordre m*

valeur propre nulle $\rightarrow$ *si* $\alpha_3=m=0$

$\Rightarrow \Theta(\theta)=A_\theta P_n\big(Cos(\theta)\big)+B_\theta Q_n\big(Cos(\theta)\big)$

$\Phi(\varphi)=E_\varphi+F_\varphi\varphi$

Exemple : Sphère pleine (r,ϑ,φ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en r=l$_r$, ne dépendant que de l'angle ϑ et pas de l'angle azimuthal φ, en réchauffement depuis la condition initiale nulle.

$$\Delta T(r,\theta,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,\theta,t)}{\partial t}=0 \quad C.L. \quad T(r,\theta,t)\big|_{r=l_r}=f_\theta(\theta) \quad C.I \quad T(r,\theta,0)=0$$

Comme d'habitude on décompose en deux sous-problèmes:

$$T(r,\theta,t)=T_p(r,\theta)-T_t(r,\theta,t) \quad \begin{cases} C.L. \quad T_p(r,\theta)\big|_{r=l_r}=f_\theta(\theta) \end{cases} \quad - \begin{cases} C.L. \quad T_t(r,\theta,t)\big|_{r=l_r}=0 \\ C.I \quad T_t(r,\theta,0)=T_p(r,\theta) \end{cases}$$

La solution stationnaire s'écrit :

$$B_0=\int_0^\pi d\theta\, Sin(\theta)\, f_\theta(\theta) \quad B_n=\int_0^\pi d\theta\, Sin(\theta)\, f_\theta(\theta)\, P_n\big(Cos(\theta)\big) \quad T(r,\theta)=\sum_{n=0,+\infty} B_n \frac{(2n+1)}{2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n(Cos(\theta))$$

Le régime transitoire se développe en série comme suit :

$$\mu_{n,l} \quad tq \quad J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}l_r\big)=0$$

$$T_t(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{A_{n,l}}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,r\big)e^{-\delta\,\mu_{n,l}{}^2 t}P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

Les fonctions propres radiales sont orthogonales :

$$Fonctions\ propres\ radiales\ \Phi^r_{n,l}(r)=J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,r\big)\ orthogonales$$

$$\int_0^{l_r} dr\, r\,\Phi^r_{n,l}(r)\Phi^r_{n,l'}(r)=\left\|\Phi^r_{n,l}(r)\right\|^2\delta_{l,l'} \quad \Phi^r_{n,l}(l_r)=0$$

$$\left\|\Phi^r_{n,l}(r)\right\|^2=\int_0^{l_r}dz\, z\left(J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,r\big)\right)^2=\left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{\Phi^r_{n,l}{}'(r)^2}{\mu_{n,l}{}^2}+\Phi^r_{n,l}(r)^2\left(1-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2\mu_{n,l}{}^2}\right)\right)\right]_0^{l_r}=\frac{l_r{}^2}{2}\frac{\Phi^r_{n,l}{}'(l_r)^2}{\mu_{n,l}{}^2}$$

$$J_{n+\frac{1}{2}}{}'\big(\mu_{n,l}\,r\big)=\mu_{n,l}\left(J_{n-\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,r\big)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,r\big)}{\mu_{n,l}\,r}\right)\Rightarrow\frac{J_{n+\frac{1}{2}}{}'\big(\mu_{n,l}\,l_r\big)}{\mu_{n,l}}=J_{n-\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,l_r\big)$$

ou bien

$$J_{n+\frac{1}{2}}{}'\big(\mu_{n,l}\,r\big)=\mu_{n,l}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,r\big)}{\mu_{n,l}\,r}-J_{n+\frac{3}{2}}\big(\mu_{n,l}\,r\big)\right)\Rightarrow\frac{J_{n+\frac{1}{2}}{}'\big(\mu_{n,l}\,l_r\big)}{\mu_{n,l}}=-J_{n+\frac{3}{2}}\big(\mu_{n,l}\,l_r\big)$$

$$\Rightarrow\left\|\Phi^r_{n,l}(r)\right\|^2=\frac{l_r{}^2}{2}\left(J_{n-\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,l_r\big)\right)^2 \quad ou\ bien \quad \left\|\Phi^r_{n,l}(r)\right\|^2=\frac{l_r{}^2}{2}\left(J_{n+\frac{3}{2}}\big(\mu_{n,l}\,l_r\big)\right)^2$$

$$Fonctions\ propres\ angulaires\ \Phi^\vartheta_n(\theta)=P_n\big(Cos(\theta)\big)\ orthogonales$$

$$\left\|\Phi^\vartheta_n(\theta)\right\|^2=\frac{2}{2n+1}$$

Avec l'application des conditions initiales, il vient alors :

$$T_t(r,\theta,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{A_{n,l}}{\sqrt{r}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)e^{-\delta\,\mu_{n,l}{}^2 t}P_n\left(Cos(\theta)\right)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}A_{n,l}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)e^{-\delta\,\mu_{n,l}{}^2 t}P_n\left(Cos(\theta)\right)$$

$$C.I.\quad T_t(r,\theta,0)=T_p(r,\theta)\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}A_{n,l}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)P_n\left(Cos(\theta)\right)=\sqrt{r}T_p(r,\theta)$$

$$A_{n,l}=\frac{\int_0^{l_r}dr\,r\sqrt{r}\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)\int_0^{\pi}d\theta\,Sin(\theta)T_p(r,\theta)P_n\left(Cos(\theta)\right)}{\left\|\Phi^r_{n,l}(r)\right\|^2\left\|\Phi^9_n(\theta)\right\|^2}=$$

$$=\frac{(2n+1)\int_0^{l_r}dr\,r\sqrt{r}\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)\int_0^{\pi}d\theta\,Sin(\theta)T_p(r,\theta)P_n\left(Cos(\theta)\right)}{l_r{}^2\left(J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}\,l_r\right)\right)^2}$$

$$A_{n,l}=\frac{(2n+1)\int_0^{l_r}dr\,r\sqrt{r}\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)\int_0^{\pi}d\theta\,Sin(\theta)\sum_{m=0,+\infty}B_m\frac{(2m+1)}{2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^m P_m(Cos(\theta))P_n\left(Cos(\theta)\right)}{l_r{}^2\left(J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}\,l_r\right)\right)^2}$$

$$A_{n,l}=\frac{(2n+1)\int_0^{l_r}dr\,r\sqrt{r}\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)\sum_{m=0,+\infty}B_m\left(\frac{r}{l_r}\right)^m\frac{(2m+1)}{2}\int_0^{\pi}d\theta\,Sin(\theta)P_n\left(Cos(\theta)\right)P_m(Cos(\theta))}{l_r{}^2\left(J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}\,l_r\right)\right)^2}$$

$$Comme\ \frac{(2m+1)}{2}\int_0^{\pi}d\theta\,Sin(\theta)P_m(Cos(\theta))P_n\left(Cos(\theta)\right)=\delta_{m,n}$$

$$A_{n,l}=\frac{(2n+1)B_n\int_0^{l_r}dr\,r^{n+1}\sqrt{r}\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)}{l_r{}^{n+2}\left(J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}\,l_r\right)\right)^2}=\frac{(2n+1)B_n\int_0^{l_r}dr\,r^{n+\frac{3}{2}}\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)}{l_r{}^{n+2}\left(J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}\,l_r\right)\right)^2}$$

$$De\ plus\int_0^{l_r}dr\,r^{n+\frac{3}{2}}\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)=\frac{1}{\mu_{n,l}{}^{n+\frac{5}{2}}}\int_0^{\mu_{n,l}l_r}dz\,z^{n+\frac{3}{2}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z)\quad comme\quad \int dz\,z^{\nu+1}\,J_\nu(z)=z^{\nu+1}\,J_{\nu+1}(z)$$

$$on\ a\int_0^{\mu_{n,l}l_r}dz\,z^{n+\frac{3}{2}}\,J_{n+\frac{1}{2}}(z)=\left(\mu_{n,l}l_r\right)^{n+\frac{3}{2}}J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\Rightarrow\int_0^{l_r}dr\,r^{n+\frac{3}{2}}\,J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)=\frac{l_r{}^{n+\frac{3}{2}}}{\mu_{n,l}}J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)$$

$$A_{n,l}=\frac{(2n+1)B_n}{\sqrt{l_r}\,\mu_{n,l}J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}\Rightarrow T_t(r,\theta,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(2n+1)B_n}{\sqrt{l_r}\,\mu_{n,l}J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\,r\right)e^{-\delta\,\mu_{n,l}{}^2 t}P_n\left(Cos(\theta)\right)$$

Et la solution s'écrit finalement :

$$B_0 = \int_0^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta) \quad B_n = \int_0^{\pi} d\theta\ Sin(\theta)\ f_\theta(\theta)\ P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

$$\mu_{n,l} \quad tq \quad J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l} l_r\big) = 0$$

$$T(r,\theta,t) = \sum_{n=0,+\infty} B_n \frac{(2n+1)}{2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n(Cos(\theta)) - \frac{1}{\sqrt{r\, l_r}} \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)B_n}{\mu_{n,l} J_{n+\frac{3}{2}}\big(\mu_{n,l} l_r\big)} J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\, r\big) e^{-\delta\, \mu_{n,l}{}^2 t} P_n\big(Cos(\theta)\big)$$

Exemple : Sphère pleine (r,ϑ,φ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en r=l$_r$. dépendant des angles ϑ et φ, en réchauffement depuis la condition initiale nulle.

$$\Delta T(r,\theta,\varphi,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,\theta,\varphi,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad T(r,\theta,\varphi,t)\big|_{r=l_r} = f_{\theta,\varphi}(\theta,\varphi)$$

$$C.I \quad T(r,\theta,\varphi,0) = 0$$

$$Condition\ aux\ limites\ f_{\theta,\varphi}(\theta,\varphi) = f_{\theta,\varphi}(\theta,-\varphi)$$

Comme d'habitude on décompose en deux sous-problèmes:

$$T(r,\theta,t) = T_p(r,\theta) - T_t(r,\theta,t)$$

$$\left\{ C.L. \quad T_p(r,\theta)\big|_{r=l_r} = f_\theta(\theta) \right. \quad - \begin{cases} C.L. \quad T_t(r,\theta,t)\big|_{r=l_r} = 0 \\ C.I \quad T_t(r,\theta,0) = T_p(r,\theta) \end{cases}$$

La solution stationnaire s'écrit :

$$T(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=+n} \frac{B_{n,m}}{(1+\partial_{m,0})\pi} \frac{(2n+1)(n-m)!}{2(n+m)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n^m\big(Cos(\theta)\big) Cos(m\varphi)$$

$$B_{n,m} = \int_0^{\pi} d\theta\ Sin(\theta) P_n^m\big(Cos(\theta)\big) \int_0^{2\pi} d\varphi\ f_{\theta,\varphi}(\theta,\varphi)\ Cos(m\varphi) = \int_{-1}^{+1} dz\ P_n^m(z) \int_0^{2\pi} d\varphi\ f_{\theta,\varphi}(z,\varphi)\ Cos(m\varphi)$$

Le régime transitoire se développe en série à trois indices l,n,m comme suit :

$$\mu_{n,l} \quad tq \quad J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l} l_r\big) = 0$$

$$T_t(r,\theta,\varphi,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+n} \frac{A_{n,l,m}}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\, r\big) e^{-\delta\, \mu_{n,l}{}^2 t} P_n^m\big(Cos(\theta)\big) Cos(m\varphi)$$

D'après les calculs effectués dans l'exemple précédent, il vient pour les fonctions propres :

$$Fonctions\ propres\ radiales\ \Phi^{r}_{n,l}(r) = J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right) orthogonales$$

$$\int_0^{l_r} dr\, r\, \Phi^{r}_{n,l}(r)\Phi^{r}_{n,l'}(r) = \left\|\Phi^{r}_{n,l}(r)\right\|^2 \delta_{l,l'} \quad \Phi^{r}_{n,l}(l_r) = 0$$

$$\left\|\Phi^{r}_{n,l}(r)\right\|^2 = \frac{l_r^{\,2}}{2}\left(J_{n-\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, l_r\right)\right)^2 \quad ou\ bien \quad \left\|\Phi^{r}_{n,l}(r)\right\|^2 = \frac{l_r^{\,2}}{2}\left(J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}\, l_r\right)\right)^2$$

$$Fonctions\ propres\ angulaires\ \Phi^{\vartheta}_{n,m}(\theta) = P_n^m\left(Cos(\theta)\right) = P_n^m\left(z\right) orthogonales$$

$$\left\|\Phi^{\vartheta}_{n,m}(\theta)\right\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

$$Fonctions\ propres\ angulaires\ \Phi^{\varphi}_{m}(\varphi) = Cos(m\varphi)\ orthogonales$$

$$\left\|\Phi^{\varphi}_{m}(\varphi)\right\|^2 = \pi\left(1+\delta_{m,0}\right)$$

Avec l'application des conditions initiales, il vient :

$$C.I.\quad T_t(r,\theta,\varphi,0)=T_p(r,\theta,\varphi)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+n} A_{n,l,m} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right) P_n^m\left(Cos(\theta)\right) Cos(m\varphi) = \sqrt{r}\, T_p(r,\theta,\varphi)$$

$$T_p(r,\theta,\varphi)=\sum_{np=0}^{+\infty}\sum_{mp=0}^{mp=+n}\frac{B_{np,mp}}{\left\|\Phi^{\vartheta}_{np,mp}(\theta)\right\|^2\left\|\Phi^{\varphi}_{mp}(\varphi)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{np} P_{np}^{mp}\left(Cos(\theta)\right) Cos(mp\,\varphi)$$

$$A_{n,l,m}=\frac{\int_0^{l_r} dr\, r\sqrt{r}\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right)\int_{-1}^{1} dz P_n^m(z)\int_0^{2\pi} d\varphi\, T_p(r,z,\varphi) Cos(m\varphi)}{\left\|\Phi^{r}_{n,l}(r)\right\|^2\left\|\Phi^{z}_{n,m}(z)\right\|^2\left\|\Phi^{\varphi}_{m}(\varphi)\right\|^2}$$

$$A_{n,l,m}=\frac{\int_0^{l_r} dr\, r\sqrt{r}\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right)\int_{-1}^{1} dz P_n^m(z)\int_0^{2\pi} d\varphi\, Cos(m\varphi)\sum_{np=0}^{+\infty}\sum_{mp=0}^{mp=+n}\frac{B_{np,mp}}{\left\|\Phi^{z}_{np,mp}(z)\right\|^2\left\|\Phi^{\varphi}_{mp}(\varphi)\right\|^2}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{np} P_{np}^{mp}(z) Cos(mp\,\varphi)}{\left\|\Phi^{r}_{n,l}(r)\right\|^2\left\|\Phi^{z}_{n,m}(z)\right\|^2\left\|\Phi^{\varphi}_{m}(\varphi)\right\|^2}$$

$$A_{n,l,m}=\frac{\sum_{np=0}^{+\infty}\sum_{mp=0}^{mp=+n}\frac{B_{np,mp}}{\left\|\Phi^{z}_{np,mp}(z)\right\|^2\left\|\Phi^{\varphi}_{mp}(\varphi)\right\|^2}\int_0^{l_r} dr\, r\sqrt{r}\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{np}\int_{-1}^{1} dz P_n^m(z) P_{np}^{mp}(z)\int_0^{2\pi} d\varphi\, Cos(m\varphi) Cos(mp\,\varphi)}{\left\|\Phi^{r}_{n,l}(r)\right\|^2\left\|\Phi^{z}_{n,m}(z)\right\|^2\left\|\Phi^{\varphi}_{m}(\varphi)\right\|^2}$$

$$Comme\ \int_0^{2\pi} d\varphi\, Cos(m\varphi) Cos(mp\,\varphi)=\left\|\Phi^{\varphi}_{mp}(\varphi)\right\|^2\delta_{m,mp}\quad et\quad \int_{-1}^{1} dz P_n^m(z) P_{np}^m(z)=\left\|\Phi^{z}_{np,mp}(z)\right\|^2\delta_{n,np}$$

$$il\ vient\quad A_{n,l,m}=\frac{B_{n,m}\int_0^{l_r} dr\, r\sqrt{r}\, J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right)\left(\frac{r}{l_r}\right)^{n}}{\left\|\Phi^{r}_{n,l}(r)\right\|^2\left\|\Phi^{z}_{n,m}(z)\right\|^2\left\|\Phi^{\varphi}_{m}(\varphi)\right\|^2}=\frac{B_{n,m}\int_0^{l_r} dr\, r^{n+\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right)}{{l_r}^{n}\left\|\Phi^{r}_{n,l}(r)\right\|^2\left\|\Phi^{z}_{n,m}(z)\right\|^2\left\|\Phi^{\varphi}_{m}(\varphi)\right\|^2}$$

$$De\ plus\int_0^{l_r} dr\, r^{n+\frac{3}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right)=\frac{{l_r}^{n+\frac{3}{2}}}{\mu_{n,l}} J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)\quad et\quad \left\|\Phi^{r}_{n,l}(r)\right\|^2=\frac{{l_r}^2}{2}\left(J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}\, l_r\right)\right)^2$$

$$A_{n,l,m}=\frac{2B_{n,m}}{\mu_{n,l}\sqrt{l_r} J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l}\, l_r\right)\left\|\Phi^{z}_{n,m}(z)\right\|^2\left\|\Phi^{\varphi}_{m}(\varphi)\right\|^2}$$

$$\Rightarrow T_t(r,\theta,\varphi,t)=\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=n}\frac{B_{n,m}}{\sqrt{l_r}\,\mu_{n,l} J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}\frac{2n+1}{\pi\left(1+\delta_{m,0}\right)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right) e^{-\delta\,\mu_{n,l}^2 t} P_n^m\left(Cos(\theta)\right) Cos(m\varphi)$$

Et la solution s'écrit finalement :

$$B_{n,m}=\int_0^{\pi} d\theta\, Sin(\theta) P_n^m\left(Cos(\theta)\right)\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\theta,\varphi}(\theta,\varphi)\, Cos(m\varphi)=\int_{-1}^{+1} dz\, P_n^m(z)\int_0^{2\pi} d\varphi\, f_{\theta,\varphi}(z,\varphi)\, Cos(m\varphi)$$

$$\mu_{n,l}\quad tq\quad J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)=0$$

$$T(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=+n} B_{n,m}\frac{2n+1}{2\pi\left(1+\delta_{m,0}\right)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^{n} P_n^m\left(Cos(\theta)\right) Cos(m\varphi)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=+n}\frac{B_{n,m}}{\sqrt{l_r}\,\mu_{n,l} J_{n+\frac{3}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}\frac{2n+1}{\pi\left(1+\delta_{m,0}\right)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\mu_{n,l}\, r\right) e^{-\delta\,\mu_{n,l}^2 t} P_n^m\left(Cos(\theta)\right) Cos(m\varphi)$$

Exemple : Sphère pleine (r,ϑ,φ) soumise à des conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes en r=l$_r$. ne dépendant que de l'angle φ, en réchauffement depuis la condition initiale nulle.

$$\Delta T(r,\theta,\varphi,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,\theta,\varphi,t)}{\partial t}=0 \quad C.L. \quad T(r,\theta,\varphi,t)\big|_{r=l_r}=f_\varphi(\varphi) \quad Condition\ aux\ limites\ f_\varphi(\varphi)=f_\varphi(-\varphi)$$

$$C.I \quad T(r,\theta,\varphi,0)=0$$

En reprenant les résultats de l'exemple précédent, on a :

$$B_{n,m}=\int_0^{\pi}d\theta\, Sin(\theta)P_n^m\big(Cos(\theta)\big)\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\theta,\varphi)\,Cos(m\varphi)=\int_{-1}^{+1}dz\,P_n^m(z)\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(z,\varphi)\,Cos(m\varphi)$$

$$\mu_{n,l} \quad tq \quad J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}l_r\big)=0$$

$$T(r,\theta,\varphi,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=+n}B_{n,m}\frac{2n+1}{2\pi\big(1+\delta_{m,0}\big)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n^m\big(Cos(\theta)\big)Cos(m\varphi)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=0}^{m=+n}\frac{B_{n,m}}{\sqrt{l_r}\,\mu_{n,l}J_{n+\frac{3}{2}}\big(\mu_{n,l}l_r\big)}\frac{2n+1}{\pi\big(1+\delta_{m,0}\big)}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,r\big)e^{-\delta\,\mu_{n,l}^2 t}P_n^m\big(Cos(\theta)\big)Cos(m\varphi)$$

Auquel on applique la particularité de la condition aux limites ne dépendant que de φ, soit :

$$f_{\theta,\varphi}(\theta,\varphi)=f_\varphi(\varphi)\Rightarrow B_{n,m}=\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Cos(m\varphi)\int_{-1}^{+1}dz\,P_n^m(z)$$

$$\int_{-1}^{+1}dz\,P_n^m(z)=\frac{m\big((-1)^n+(-1)^m\big)2^{m-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n-m}{2}\right)!} \qquad \int_{-1}^{+1}dz\,P_0(z)=2 \quad A_0=\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi) \quad A_m=\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Cos(m\varphi)$$

$$B_{n,m}=\frac{m\big((-1)^n+(-1)^m\big)2^{m-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n-m}{2}\right)!}A_m \quad pour\ n,m>0 \quad B_{n,0}=0 \quad pour\ n>0 \quad B_{0,0}=2A_0$$

Il vient la solution complète :

$$T(r,\theta,\varphi,t)=\frac{A_0}{2\pi}-\frac{1}{\pi\sqrt{r}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{A_0}{\sqrt{l_r}\,\mu_{0,l}J_{\frac{3}{2}}\big(\mu_{0,l}l_r\big)}J_{\frac{1}{2}}\big(\mu_{0,l}\,r\big)e^{-\delta\,\mu_{0,l}^2 t}+$$

$$+\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=1}^{m=+n}\frac{m\big((-1)^n+(-1)^m\big)2^{m-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n-m}{2}\right)!}A_m\frac{2n+1}{2\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\left(\frac{r}{l_r}\right)^n P_n^m\big(Cos(\theta)\big)Cos(m\varphi)$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{r}}\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{l=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{m=+n}\frac{A_m(2n+1)\,m\big((-1)^n+(-1)^m\big)2^{m-2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)(n-m)!}{\sqrt{l_r}\,\mu_{n,l}J_{n+\frac{3}{2}}\big(\mu_{n,l}l_r\big)\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)\left(\frac{n-m}{2}\right)!(n+m)!}J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}\,r\big)e^{-\delta\,\mu_{n,l}^2 t}P_n^m\big(Cos(\theta)\big)Cos(m\varphi)$$

$$A_0=\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)=2\int_0^{\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi) \qquad \mu_{n,l} \quad tq \quad J_{n+\frac{1}{2}}\big(\mu_{n,l}l_r\big)=0 \qquad \mu_{0,l} \quad tq \quad J_{\frac{1}{2}}\big(\mu_{0,l}l_r\big)=0$$

$$A_m=\int_0^{2\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Cos(m\varphi)=2\int_0^{\pi}d\varphi\, f_\varphi(\varphi)\,Cos(m\varphi)$$

Problème de diffusion radiale sur une hypersphère : ligne, cylindre, sphère et hypersphère

La séparation de l'équation de diffusion radiale dans le cas d'une hypersphère

Les équations séparées du problème de Helmholtz, indépendant de tous les angles donnent :

$$r=\|\vec{x}\| \Rightarrow \Delta U(\|\vec{x}\|)+\mu^2 U(\|\vec{x}\|)=U''(r)+\left(\frac{n-1}{r}\right)U'(r)+\mu^2 U(r)=0 \quad T(r,t)=U(r)W(t)$$

$$et\ W(t)=e^{-\delta\,\mu^2 t} \quad ou \quad W(t)=B$$

$$\begin{cases} si\ n=1 \Rightarrow U''(r)+\mu^2 U(r)=0 \\ si\ n=2 \Rightarrow U''(r)+\frac{1}{r}U'(r)+\mu^2 U(r)=0 \\ si\ n=3 \Rightarrow U''(r)+\frac{2}{r}U'(r)+\mu^2 U(r)=0 \\ si\ n\geq 3 \Rightarrow U''(r)+\frac{n-1}{r}U'(r)+\mu^2 U(r)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow U(r)=\begin{cases} A\,Cos(\mu\,r)+B\,Sin(\mu\,r) \quad si\ n=1 \\ A\,J_0(\mu\,r)+B_0 Y_0(\mu\,r) \quad si\ n=2 \\ \frac{1}{r}\left(A\,Cos(\mu\,r)+B\,Sin(\mu\,r)\right) \quad si\ n=3 \\ r^{\frac{2-n}{2}}\left(A\,J_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)+B\,Y_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)\right) \quad si\ n\geq 4 \end{cases}$$

$$si\ n=3 \quad r^{\frac{2-n}{2}}\left(A\,J_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)+B\,Y_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)\right)=\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A\,J_{\frac{1}{2}}(\mu\,r)+B\,Y_{\frac{1}{2}}(\mu\,r)\right)$$

$$J_{\frac{1}{2}}(\mu\,r)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Sin(\mu\,r)}{\sqrt{r}} \quad J_{\frac{1}{2}}(\mu\,r)=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{Cos(\mu\,r)}{\sqrt{r}}$$

Problème de diffusion sur une ligne : condition initiale et conditions aux limites de Dirichlet

Cas n=1 : le problème de diffusion sur une ligne, sous forme séparé s'écrit *(voir page 102 du Livre de H.S.Carslaw et J.C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids) :*

$$\Delta T(r,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=0 \quad T(r,t)=U(r)W(t)$$

$$\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2}+\mu^2 U(r)=0 \quad \frac{\partial W(t)}{\partial t}+\delta\,\mu^2 W(t)=0$$

$$C.L. \quad T(0,t)=\varphi_1(t)$$

$$C.L. \quad T(l_r,t)=\varphi_2(t)$$

$$C.I. \quad T(r,0)=f(r)$$

On peut ramener la solution à l'addition des solutions des deux problèmes suivants :

$$T(r,t)=T_u(r,t)+T_w(r,t)$$

$$\begin{cases} C.L. \quad T_u(0,t)=0 \\ C.L. \quad T_u(l_r,t)=0 \\ C.I. \quad T_u(r,0)=f(r) \end{cases} \qquad \begin{cases} C.L. \quad T_w(0,t)=\varphi_1(t) \\ C.L. \quad T_w(l_r,t)=\varphi_2(t) \\ C.I. \quad T_w(r,0)=0 \end{cases}$$

La première solution est une solution homogène qui se développe ainsi :

$$\mu \to \mu_n = \frac{n\pi}{l_r}$$

$$T_u(r,t) = \frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t} Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^{l_r} dz\ f(z) Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)$$

La seconde solution utilise les résultats du théorème de Duhamel .

<u>*Application du théorème de Duhamel à la solution*</u>

La solution du problème

$$T_w(r,t)$$

$$\begin{cases} C.L. & T_w(0,t) = \varphi_1(t) \\ C.L. & T_w(l_r,t) = \varphi_2(t) \\ C.I. & T_w(r,0) = 0 \end{cases}$$

est dérivée du problème à température fixé aux limites du domaine :

$$T_w(r,\lambda,t) = \varphi_1(\lambda)T_{w1}(r,t) + \varphi_2(\lambda)T_{w2}(r,t)$$

$$\begin{cases} C.L. & T_w(0,\lambda,t) = \varphi_1(\lambda) \\ C.L. & T_w(l_r,\lambda,t) = \varphi_2(\lambda) \\ C.I. & T_w(r,\lambda,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C.L. & T_{w1}(0,t) = 1 \\ C.L. & T_{w1}(l_r,t) = 0 \\ C.I. & T_{w1}(r,0) = 0 \end{cases} \begin{cases} C.L. & T_{w2}(0,t) = 0 \\ C.L. & T_{w2}(l_r,t) = 1 \\ C.I. & T_{w2}(r,0) = 0 \end{cases}$$

Avec les solutions respectives pour T_{w1} *:*

$$\begin{cases} C.L. & T_{w1}(0,t) = 1 \\ C.L. & T_{w1}(l_r,t) = 0 \\ C.I. & T_{w1}(r,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow T_{w1}(r,t) = T_p(r) + T_t(r,t)$$

$$T_p(r)\begin{cases} C.L. & T_p(0) = 1 \\ C.L. & T_p(l) = 0 \end{cases} \quad T_t(r,t)\begin{cases} C.L. & T_t(0,t) = 0 \\ C.L. & T_t(l_r,t) = 0 \\ C.I. & T_t(r,0) = -T_p(r) \end{cases}$$

$$T_p(r) = 1 - \frac{r}{l_r} \quad \mu_n = \frac{n\pi}{l_r} \quad l_r\mu_n = n\pi$$

$$T_t(r,t) = \frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t} B_n Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$B_n = \int_0^{l_r} dr\left(\frac{r}{l_r} - 1\right) Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right) = \frac{1}{l_r}\int_0^{l_r} dr\, r\, Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right) - \int_0^{l_r} dr\, Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$\int_0^{l_r} dr\ Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right) = \frac{1}{\mu_n}\int_0^{n\pi} dz\ Sin(z) = \frac{1 - Cos(n\pi)}{\mu_n}$$

$$\int_0^{l_r} dr\, r\, Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right) = \frac{1}{\mu_n{}^2}\int_0^{n\pi} dz\, z\, Sin(z) = \frac{1}{\mu_n{}^2}\left[Sin(z) - z\, Cos(z)\right]_0^{n\pi} = \frac{-n\pi\, Cos(n\pi)}{\mu_n{}^2}$$

$$B_n = -\frac{Cos(n\pi)}{\mu_n} - \frac{1 - Cos(n\pi)}{\mu_n} = -\frac{1}{\mu_n}$$

$$\Rightarrow T_{w1}(r,t) = 1 - \frac{r}{l_r} - \frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\frac{1}{\mu_n} Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right) = 1 - \frac{r}{l_r} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}}{n} Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

Et pour T_{w2} :

$$\begin{cases} C.L. \quad T_{w2}(0,t)=0 \\ C.L. \quad T_{w2}(l_r,t)=1 \Rightarrow T_{w2}(r,t)=T_p(r)+T_t(r,t) \quad T_p(r)=\dfrac{r}{l_r} \quad T_t(r,t) \\ C.I. \quad T_{w2}(r,0)=0 \end{cases} \begin{cases} C.L. \quad T_t(0,t)=0 \\ C.L. \quad T_t(l_r,t)=0 \\ C.I. \quad T_t(r,0)=-\dfrac{r}{l_r} \end{cases}$$

$$\mu_n=\frac{n\pi}{l_r} \quad l_r\mu_n=n\pi \quad T_t(r,t)=\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}B_n Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$B_n=-\frac{1}{l_r}\int_0^{l_r}dr\,r\,Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)=\frac{Cos(n\pi)}{\mu_n}$$

$$\Rightarrow T_{w2}(r,t)=\frac{r}{l_r}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\,\frac{Cos(n\pi)}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

Ce qui donne pour la solution du problème initial de Duhamel :

$$\mu\rightarrow\mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

$$T_{w1}(r,t)=\left(1-\frac{r}{l_r}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\right) \quad T_{w2}(r,t)=\left(\frac{r}{l_r}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\right)$$

$$T_w(r,\lambda,t)=\varphi_1(\lambda)\left(1-\frac{r}{l_r}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\right)+\varphi_2(\lambda)\left(\frac{r}{l_r}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\right)$$

$$T_w(r,\lambda,t-\lambda)=\varphi_1(\lambda)\left(1-\frac{r}{l_r}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 (t-\lambda)}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\right)+\varphi_2(\lambda)\left(\frac{r}{l_r}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 (t-\lambda)}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\right)$$

Et par application du théorème de Duhamel :

Posons

$$F_1(r,t-\lambda)=\left(1-\frac{r}{l_r}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 (t-\lambda)}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\right) \quad F_2(r,t-\lambda)=\left(\frac{r}{l_r}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 (t-\lambda)}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F_1(r,t-\lambda)=\frac{2\delta}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n{}^2\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 (t-\lambda)}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right) \quad \frac{\partial}{\partial t}F_2(r,t-\lambda)=-\frac{2\delta}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n{}^2(-1)^n\frac{e^{-\delta\,\mu_n{}^2 (t-\lambda)}}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$T_w(r,t)=\int_0^t d\lambda\,\frac{\partial}{\partial t}T_w(r,\lambda,t-\lambda)=\int_0^t d\lambda\,\varphi_1(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}F_1(r,t-\lambda)+\int_0^t d\lambda\varphi_2(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}F_2(r,t-\lambda)$$

$$T_w(r,t)=\frac{2\delta\,\pi}{l_r{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\left(\int_0^t d\lambda\,\left(\varphi_1(\lambda)-(-1)^n\varphi_2(\lambda)\right)e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}\right)$$

Ce qui donne la solution complète du problème à une dimension :

$$T(r,t)=\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^{l_r}dz\,f(z)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)+\frac{2\delta\,\pi}{l_r{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\left(\int_0^t d\lambda\,\left(\varphi_1(\lambda)-(-1)^n\varphi_2(\lambda)\right)e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}\right)$$

$$T(r,t)=\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\left(\int_0^{l_r}dz\,f(z)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)+\frac{n\delta\,\pi}{l_r}\int_0^t d\lambda\,\left(\varphi_1(\lambda)-(-1)^n\varphi_2(\lambda)\right)e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}\right) \qquad avec \quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=1, valeur initiale nulle, valeur fixe en surface $f(r)=0 \quad \varphi_1(t)=T_1 \quad \varphi_2(t)=T_2$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2\delta\pi}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,n\,Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\left(T_1-(-1)^nT_2\right)\left(\int_0^t d\lambda\;e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}\right)\quad \int_0^t d\lambda\;e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}=\frac{1}{\delta\;\mu_n^{\,2}}\left(e^{\delta\,\mu_n^{\,2}t}-1\right)$$

$$T(r,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\frac{\left(T_1-(-1)^nT_2\right)}{n}\left(1-e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(T_1-(-1)^n(T_2-T_1)-(-1)^nT_1\right)}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(T_1-(-1)^nT_2\right)}{n}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$=\frac{2T_1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)+\frac{2(T_2-T_1)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-(-1)^n\right)}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(T_1-(-1)^nT_2\right)}{n}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$Comme\int_0^{l_r}dr\,r\,Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)=\frac{-(-1)^nl_r^{\,2}}{n\pi}\Rightarrow\frac{r}{l_r}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-(-1)^n\right)}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$\int_0^{l_r}dr\,Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)=l_r\,\frac{1-(-1)^n}{n\pi}\Rightarrow 1=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-(-1)^n\right)}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$Soit\quad \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\frac{\left(T_1-(-1)^nT_2\right)}{n}=T_1+(T_2-T_1)\frac{r}{l_r}$$

$$T(r,t)=T_1+(T_2-T_1)\frac{r}{l_r}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(T_1-(-1)^nT_2\right)}{n}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\quad avec\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

<u>*Problème de diffusion sur une cylindre : condition initiale et conditions aux limites de Dirichlet*</u>

Cas n=2, dans ce cas la condition en r=0 se réduit à une condition de finitude :

$$\Delta T(r,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=0\quad T(r,t)=U(r)W(t)$$

$$\frac{\partial^2U(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}+\mu^2U(r)=0\quad \frac{\partial W(t)}{\partial t}+\delta\,\mu^2W(t)=0$$

$$C.L.\quad T(0,t)\ fini$$

$$C.L.\quad T(l_r,t)=\varphi_2(t)$$

$$C.I.\quad T(r,0)=f(r)$$

On peut ramener la solution à l'addition des solutions des deux problèmes suivants :

$$T(r,t)=T_u(r,t)+T_w(r,t)$$

$$\begin{cases}C.L.\quad T_u(0,t)=0\\ C.L.\quad T_u(l_r,t)=0\\ C.I.\quad T_u(r,0)=f(r)\end{cases}\qquad \begin{cases}C.L.\quad T_w(0,t)\quad fini\\ C.L.\quad T_w(l_r,t)=\varphi_2(t)\\ C.I.\quad T_w(r,0)=0\end{cases}$$

La première solution est une solution homogène qui se développe ainsi :

$$\mu\to\mu_n\quad tq\quad J_0(\mu_nl_r)=0\quad \left\|\Phi_n(r)\right\|^2=\int_0^{l_r}dz\;z\left(J_0(\mu_nz)\right)^2=\frac{l_r^{\,2}}{2}J_1(\mu_nl_r)^2$$

$$T_u(r,t)=\frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_nr)}{J_1(\mu_nl_r)^2}\int_0^{l_r}dz\;z\,f(z)\,J_0(\mu_nz)$$

La seconde solution utilise les résultats du théorème de Duhamel :

<u>Application du théorème de Duhamel à la solution</u>

La solution du problème $\begin{cases} C.L. & T_w(0,t) \quad fini \\ C.L. & T_w(l_r,t)=\varphi_2(t) \\ C.I. & T_w(r,0)=0 \end{cases}$ $T_w(r,t)$

est dérivée du problème à température fixée aux limites du domaine : $\begin{cases} C.L. & T_{w2}(0,t) \quad fini \\ C.L. & T_{w2}(l_r,t)=1 \\ C.I. & T_{w2}(r,0)=0 \end{cases}$ $T_w(r,\lambda,t)=\varphi_2(\lambda)T_{w2}(r,t)$

Avec la solution pour T_{w2} *:*

$$\begin{cases} C.L. & T_{w2}(0,t) \quad fini \\ C.L. & T_{w2}(l_r,t)=1 \\ C.I. & T_{w2}(r,0)=0 \end{cases} \Rightarrow T_{w2}(r,t)=1+T_t(r,t) \quad T_t(r,t)\begin{cases} C.L. & T_t(0,t)=0 \\ C.L. & T_t(l_r,t)=0 \\ C.I. & T_t(r,0)=-1 \end{cases}$$

$$\mu_n \to J_0(\mu_n l_r)=0 \quad \int_0^{l_r} dz\, z\, J_0(\mu_n z)=\frac{1}{\mu_n^{\,2}}\left[zJ_1(z)\right]_0^{\lambda_n l_r}=\frac{l_r J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n}$$

$$T_t(r,0)=-1=-\frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)^2}\int_0^{l_r} dz\, z\, J_0(\mu_n z)=-\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}$$

$$T_t(r,t)=-\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)} \Rightarrow T_{w2}(r,t)=1-\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}$$

Ce qui donne pour la solution du problème initial de Duhamel :

$\mu_n \to J_0(\mu_n l_r)=0$

$$T_w(r,\lambda,t)=\varphi_2(\lambda)\left(1-\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}\right) \Rightarrow T_w(r,\lambda,t-\lambda)=\varphi_2(\lambda)\left(1-\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}(t-\lambda)}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}\right)$$

Et par application du théorème de Duhamel :

Posons

$$F_2(r,t-\lambda)=\left(1-\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}(t-\lambda)}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F_2(r,t-\lambda)=\frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n^{\,2}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}(t-\lambda)}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}=\frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}(t-\lambda)}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)}$$

$$T_w(r,t)=\int_0^t d\lambda\varphi_2(\lambda)\,\frac{\partial}{\partial t}F_2(r,t-\lambda) \Rightarrow T_w(r,t)=\frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}\right)$$

Ce qui donne la solution complète du problème à deux dimensions :

$$T(r,t)=\frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)^2}\int_0^{l_r} dz\, z\, f(z)\, J_0(\mu_n z)+\frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}\right)$$

$$T(r,t)=\frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)^2}\left(\int_0^{l_r} dz\, z\, f(z)\, J_0(\mu_n z)+\delta\, l_r\mu_n J_1(\mu_n l_r)\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}\right)$$

avec $\mu_n \to J_0(\mu_n l_r)=0$

Cas n=2, valeur initiale fixe, valeur nulle en surface $f(r)=T_s \quad \varphi_2(t)=0$:

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)^2}\int_0^{l_r}dz\;z\,J_0(\mu_n z)\qquad \int_0^{l_r}dz\;z\,J_0(\mu_n z)=\frac{l_r}{\mu_n}J_1(\mu_n l_r)$$

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}$$

$$avec\quad \mu_n \to J_0(\mu_n l_r)=0$$

Cas n=2, valeur initiale fixe, valeur nulle en surface $f(r)=T_s-k\,r^2 \quad \varphi_2(t)=0$:

$$T(r,t)=\frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)^2}\int_0^{l_r}dz\,\left(T_s z-kz^3\right)J_0(\mu_n z)$$

$$\int dz\;z^{\nu+3}J_\nu(z)=\frac{z^{\nu+2}\Gamma(\nu+2)}{(\nu+1)\Gamma(\nu+1)}\left(2(\nu+1)J_{\nu+2}(z)-zJ_{\nu+3}(z)\right)\Rightarrow\int dz\;z^3J_0(z)=z^2\left(2J_2(z)-zJ_3(z)\right)$$

$$Formule\,de\,récurrence\Rightarrow J_\nu(z)=\frac{2(\nu-1)}{z}J_{\nu-1}(z)-J_{\nu-2}(z)\Rightarrow J_3(z)=\frac{4}{z}J_2(z)-J_1(z)$$

$$\Rightarrow\int dz\;z^3J_0(z)=z^2\left(2J_2(z)-z\left(\frac{4}{z}J_2(z)-J_1(z)\right)\right)=z^2\left(zJ_1(z)-2J_2(z)\right)$$

$$\int dz\;z^3J_0(\mu_n z)=\frac{1}{\mu_n^{\,4}}\int dz\;z^3J_0(z)\Rightarrow\int_0^{l_r}dz\;z^3J_0(\mu_n z)=\frac{l_r^{\,3}}{\mu_n}J_1(\mu_n l_r)-\frac{2l_r^{\,2}}{\mu_n^{\,2}}J_2(\mu_n l_r)$$

$$et\int_0^{l_r}dz\;z\,J_0(\mu_n z)=\frac{l_r}{\mu_n}J_1(\mu_n l_r)$$

$$T(r,t)=\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}J_1(\mu_n l_r)^2}\left(\mu_n\left(T_s-kl_r^{\,2}\right)J_1(\mu_n l_r)+2l_r kJ_2(\mu_n l_r)\right)$$

$$avec\quad \mu_n \to J_0(\mu_n l_r)=0$$

Cas n=2, valeur initiale nulle, valeur en surface $f(r)=0 \quad \varphi_2(t)=T_s$:

$$T(r,t)=\frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\mu_n\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)}\int_0^{t}d\lambda\;\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}$$

$$\varphi_2(\lambda)=T_s\Rightarrow\int_0^{t}d\lambda\;\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}=T_s\int_0^{t}d\lambda\;e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}=\frac{T_s}{\delta\;\mu_n^{\,2}}\left(e^{\delta\,\mu_n^{\,2}t}-1\right)$$

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}\left(1-e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\right)=\frac{2T_s}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}-\frac{2T_s}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}$$

$$or\;\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}=1\Rightarrow T(r,t)=T_s-\frac{2T_s}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}$$

$$avec\quad \mu_n \to J_0(\mu_n l_r)=0$$

Cas n=2, valeur initiale nulle, valeur en surface $f(r)=0 \quad \varphi_2(t)=T_s\, t$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\,\mu_n\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)}\int_0^t d\lambda\;\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}$$

$$\varphi_2(\lambda)=\lambda T_s \Rightarrow \int_0^t d\lambda\;\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}=T_s\int_0^t d\lambda\;\lambda\;e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}=\frac{T_s}{\left(\delta\;\mu_n{}^2\right)^2}\left((\delta\;\mu_n{}^2 t-1)e^{\delta\,\mu_n{}^2 t}+1\right)$$

$$T(r,t)=\frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n l_r)}\,\frac{T_s}{\left(\delta\;\mu_n{}^2\right)^2}\left((\delta\;\mu_n{}^2 t-1)+e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\right)$$

$$=T_s t\,\underbrace{\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}}_{=1}-\frac{2T_s}{l_r\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^3 J_1(\mu_n l_r)}+\frac{2T_s}{l_r\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^3 J_1(\mu_n l_r)}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}$$

$$Comme\int_0^{l_r} dz\;z\left(l_r{}^2-z^2\right)J_0(\mu_n z)=\frac{2l_r{}^2}{\mu_n{}^2}J_2(\mu_n l_r)$$

$$et\,récurrence \Rightarrow J_\nu(z)=\frac{2(\nu-1)}{z}J_{\nu-1}(z)-J_{\nu-2}(z)\Rightarrow J_2(\mu_n l_r)=\frac{4}{\mu_n l_r}J_1(\mu_n l_r)-J_0(\mu_n l_r)=\frac{4J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n l_r}$$

$$\int_0^{l_r} dz\;z\left(l_r{}^2-z^2\right)J_0(\mu_n z)=\frac{8l_r}{\mu_n{}^3}J_1(\mu_n l_r)\Rightarrow\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^3 J_1(\mu_n l_r)}=\frac{\left(l_r{}^2-r^2\right)}{4}$$

$$T(r,t)=T_s\left(t-\frac{\left(l_r{}^2-r^2\right)}{4\delta}\right)+\frac{2T_s}{l_r\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^3 J_1(\mu_n l_r)}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}$$

$$avec \quad \mu_n \to J_0(\mu_n l_r)=0$$

<u>Problème de diffusion sur une cylindre : condition initiale et conditions aux limites de Robin</u>

Cas n=2, avec condition mixte de Robin sur la surface, la condition en r=0 se réduit à une condition de finitude :

$$\Delta T(r,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=0 \quad T(r,t)=U(r)W(t)$$

$$\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}+\mu^2 U(r)=0 \quad \frac{\partial W(t)}{\partial t}+\delta\,\mu^2 W(t)=0$$

$$C.L. \quad T(0,t)\;fini$$

$$C.L. \quad \alpha\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}+\beta\,T(r,t)\Big|_{r=l_r}=0$$

$$C.I. \quad T(r,0)=f(r)$$

Le problème est homogène et se développe directement en série ainsi :

$$\Phi_n(r)=J_0(\mu_n r)\Rightarrow\alpha\,\mu_n J_0{}'(\mu_n l_r)+\beta\,J_0(\mu_n l_r)=-\alpha\,\mu_n J_1(\mu_n l_r)+\beta\,J_0(\mu_n l_r)=0$$

$$\mu\to\mu_n \quad tq \quad \alpha\,\mu_n J_1(\mu_n l_r)=\beta\,J_0(\mu_n l_r)$$

$$\|\Phi_n(r)\|^2=\int_0^{l_r} dz\;z\left(J_0(\mu_n z)\right)^2=\frac{l_r{}^2}{2}\left(J_1(\mu_n l_r)^2+J_0(\mu_n l_r)^2\right)=\frac{l_r{}^2 J_0(\mu_n l_r)^2}{2\alpha^2\mu_n{}^2}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n{}^2\right)=\frac{l_r{}^2 J_1(\mu_n l_r)^2}{2\beta^2\mu_n{}^2}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n{}^2\right)$$

$$T(r,t)=\frac{2}{l_r{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\,\frac{\alpha^2\mu_n{}^2 J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n{}^2\right)J_0(\mu_n l_r)^2}\int_0^{l_r} dz\;z\,f(z)\,J_0(\mu_n z)$$

Cas n=2, valeur initiale constante, radiation homogène en surface $f(r)=T_s$ *:*

$\mu \to \mu_n \quad tq \quad \alpha\, \mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\, J_0(\mu_n l_r)$

$$\|\Phi_n(r)\|^2 = \int_0^{l_r} dz\, z\left(J_0(\mu_n z)\right)^2 = \frac{l_r^{\,2}}{2}\left(J_1(\mu_n l_r)^2 + J_0(\mu_n l_r)^2\right) = \frac{l_r^{\,2} J_0(\mu_n l_r)^2}{2\alpha^2 \mu_n^{\,2}}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) = \frac{l_r^{\,2} J_1(\mu_n l_r)^2}{2\beta^2 \mu_n^{\,2}}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)$$

$$\int_0^{l_r} dz\, z\, f(z)\, J_0(\mu_n z) = T_s \int_0^{l_r} dz\, z\, J_0(\mu_n z) = T_s\, \frac{\mu_n l_r J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n^{\,2}} = T_s\, \frac{l_r J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n}$$

$$Comme\; T(r,t) = \frac{2}{l_r^{\,2}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}\, \frac{\alpha^2 \mu_n^{\,2} J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)^2} \int_0^{l_r} dz\, z\, f(z)\, J_0(\mu_n z)$$

$$= \frac{2}{l_r^{\,2}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}\, \frac{\alpha^2 \mu_n^{\,2} J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)^2}\, T_s\, \frac{l_r J_1(\mu_n l_r)}{\mu_n} = \frac{2\alpha\, T_s}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}\, \frac{J_0(\mu_n r)\, \alpha\, \overbrace{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}^{=\beta J_0(\mu_n l_r)}}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)^2}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{2\,\alpha\,\beta\, T_s}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}\, \frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)}$$

Cas n=2, valeur initiale quadratique en r, radiation homogène en surface $f(r)=T_s r^2$ *:*

$\mu \to \mu_n \quad tq \quad \alpha\, \mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\, J_0(\mu_n l_r)$

$$\|\Phi_n(r)\|^2 = \frac{l_r^{\,2} J_0(\mu_n l_r)^2}{2\alpha^2 \mu_n^{\,2}}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) = \frac{l_r^{\,2} J_1(\mu_n l_r)^2}{2\beta^2 \mu_n^{\,2}}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)$$

$$\int_0^{l_r} dz\, z\, f(z)\, J_0(\mu_n z) = T_s \int_0^{l_r} dz\, z^3\, J_0(\mu_n z) = T_s\, \frac{\int_0^{\mu_n l_r} dz\, z^3\, J_0(z)}{\mu_n^{\,4}}$$

$$Récurrence\; J_2(z) = \frac{2}{z} J_1(z) - J_0(z) \Rightarrow \int dz\, z^3 J_0(z) = z^2\left(z J_1(z) - 2 J_2(z)\right) = \left(J_1(z)\left(z^3-4z\right) + 2z^2 J_0(z)\right)$$

$$\int_0^{\mu_n l_r} dz\, z^3\, J_0(z) = \mu_n l_r J_1(\mu_n l_r)\left(\mu_n^{\,2} l_r^{\,2} - 4\right) + 2\mu_n^{\,2} l_r^{\,2} J_0(\mu_n l_r)$$

$$\int_0^{l_r} dz\, z\, f(z)\, J_0(\mu_n z) = T_s\, \frac{l_r J_1(\mu_n l_r)\left(\mu_n^{\,2} l_r^{\,2} - 4\right) + 2\mu_n l_r^{\,2} J_0(\mu_n l_r)}{\mu_n^{\,3}} = l_r T_s\, \frac{\mu_n J_1(\mu_n l_r)\left(\mu_n^{\,2} l_r^{\,2} - 4\right) + 2\mu_n^{\,2} l_r J_0(\mu_n l_r)}{\mu_n^{\,4}}$$

$$Comme\; T(r,t) = \frac{2}{l_r^{\,2}} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}\, \frac{\alpha^2 \mu_n^{\,2} J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)^2} \int_0^{l_r} dz\, z\, f(z)\, J_0(\mu_n z)$$

$$= \frac{2T_s\alpha}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}\, \frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)^2}\, \frac{\alpha\, \overbrace{\mu_n J_1(\mu_n l_r)}^{=\beta J_0(\mu_n l_r)}\left(\mu_n^{\,2} l_r^{\,2} - 4\right) + 2\alpha\, \mu_n^{\,2} l_r J_0(\mu_n l_r)}{\mu_n^{\,2}}$$

$$= \frac{2T_s\alpha}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}\, \frac{\left(\beta\left(\mu_n^{\,2} l_r^{\,2} - 4\right) + 2\alpha\, \mu_n^{\,2} l_r\right) J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{2T_s\alpha}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t}\left(l_r^{\,2}\left(\beta + \frac{2\alpha}{l_r}\right) - \frac{4\beta}{\mu_n^{\,2}}\right) \frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)}$$

Lorsque $f(r)=T_s\left(l_r^{\,2}-r^2\right)$*, il vient immédiatement par combinaison linéaire :*

$$T(r,t)=-\frac{2T_s\alpha}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\left(l_r^{\,2}\left(\beta+\frac{2\alpha}{l_r}\right)-\frac{4\beta}{\mu_n^{\,2}}\right)\frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)}$$

$$+\frac{2T_s\alpha}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}l_r^{\,2}\beta\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)}$$

$$\Rightarrow T(r,t)=\frac{2T_s\alpha}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\left(\frac{4\beta}{\mu_n^{\,2}}-2\alpha\,l_r\right)\frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)}$$

Cas n=2, valeur initiale nulle, radiation inhomogène en surface $\alpha\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}+\beta\,T(r,t)\Big|_{r=l_r}=\beta\,T_s$ *:*

On se trouve dans le cas n°2 où l'on décompose le problème en deux sous-problèmes, l'un étant la température stationnaire et l'autre un régime transitoire :

$$T(r,t)=T_p(r)-T_t(r,t)$$

$$\begin{cases}C.L. & \alpha\frac{\partial T_p(r)}{\partial r}+\beta\,T_p(r)\Big|_{r=l_r}=\beta\,T_s\end{cases}\quad-\begin{cases}C.L. & \alpha\frac{\partial T_t(r,t)}{\partial r}+\beta\,T_t(r,t)\Big|_{r=l_r}=0\\ C.I. & T_t(r,0)=T_p(r)\end{cases}$$

La régime permanent est automatiquement la solution triviale T(r)=T_s. Pour le régime transitoire, il vient immédiatement :

$$\mu\to\mu_n\quad tq\quad \alpha\,\mu_n J_1(\mu_n l_r)=\beta\,J_0(\mu_n l_r)\quad T_t(r,t)=\frac{2\,\alpha\,\beta\,T_s}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)}$$

D'où la solution :

$$\mu\to\mu_n\quad tq\quad \alpha\,\mu_n J_1(\mu_n l_r)=\beta\,J_0(\mu_n l_r)\quad T(r,t)=T_s-\frac{2\,\alpha\,\beta\,T_s}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)}$$

Cas n=2, valeur initiale nulle, radiation inhomogène en surface $\alpha\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}+\beta\,T(r,t)\Big|_{r=l_r}=\beta\,T_s\,t$ *:*

La solution utilise les résultats du théorème de Duhamel que l'on applique également dans le cas de conditions mixtes de Robin <u>*Application du théorème de Duhamel à la solution*</u>

La solution du problème $T(r,t)$ $\begin{cases}C.L. & T(0,t)\quad fini\\ C.L. & \alpha\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}+\beta\,T(r,t)\Big|_{r=l_r}=\beta\,\varphi_2(t)\\ C.I. & T(r,0)=0\end{cases}$

est dérivée du problème à conditions mixtes de Robin fixées aux limites du domaine :

$$T_w(r,\lambda,t)=\varphi_2(\lambda)T_{w2}(r,t)$$

$$\begin{cases}C.L. & T_{w2}(0,t)\quad fini\\ C.L. & \alpha\frac{\partial T_{w2}(r,t)}{\partial r}+\beta\,T_{w2}(r,t)\Big|_{r=l_r}=\beta\\ C.I. & T_{w2}(r,0)=0\end{cases}$$

Avec la solution pour T_{w2} *que l'on a déjà calculée :*

$$\begin{cases} C.L. \quad T_{w2}(0,t) \quad fini \\ C.L. \quad \alpha \dfrac{\partial T_{w2}(r,t)}{\partial r} + \beta\, T_{w2}(r,t)\Big|_{r=l_r} = \beta \Rightarrow T_{w2}(r,t) = 1 - T_t(r,t) \\ C.I. \quad T_{w2}(r,0) = 0 \end{cases} \quad T_t(r,t) \begin{cases} C.L. \quad T_t(0,t) = 0 \\ C.L. \quad \alpha \dfrac{\partial T_t(r,t)}{\partial r} + \beta\, T_t(r,t)\Big|_{r=l_r} = 0 \\ C.I. \quad T_t(r,0) = 1 \end{cases}$$

$$\mu_n \quad tq \quad \alpha\, \mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\, J_0(\mu_n l_r)$$

$$T_{w2}(r,t) = 1 - \frac{2\alpha\beta}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t} \frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2 + \alpha^2 \mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)}$$

Ce qui donne pour la solution du problème initial de Duhamel :

$$\mu_n \quad tq \quad \alpha\, \mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\, J_0(\mu_n l_r)$$

$$T_w(r,\lambda,t) = \varphi_2(\lambda)\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t} \frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2 + \alpha^2 \mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)}\right)$$

$$\Rightarrow T_w(r,\lambda,t-\lambda) = \varphi_2(\lambda)\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2}(t-\lambda)} \frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2 + \alpha^2 \mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)}\right)$$

Et par application du théorème de Duhamel :

Posons

$$F_2(r,t-\lambda) = \left(1 - \frac{2\alpha\beta}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2}(t-\lambda)} \frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2 + \alpha^2 \mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_2(r,t-\lambda) = \frac{2\alpha\beta\delta}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2}(t-\lambda)} \frac{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2 + \alpha^2 \mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)}$$

$$T(r,t) = \int_0^t d\lambda \varphi_2(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} F_2(r,t-\lambda)$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{2\alpha\beta\delta}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t} \frac{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2 + \alpha^2 \mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)} \left(\int_0^t d\lambda\, \varphi_2(\lambda) e^{\delta\, \mu_n^{\,2} \lambda}\right)$$

Ce qui donne la solution complète de ce problème à deux dimensions :

$$T(r,t) = \frac{2\alpha\beta\delta}{l_r} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_n^{\,2} t} \frac{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2 + \alpha^2 \mu_n^{\,2}\right) J_0(\mu_n l_r)} \left(\int_0^t d\lambda\, \varphi_2(\lambda) e^{\delta\, \mu_n^{\,2} \lambda}\right)$$

$$avec \quad \mu_n \quad tq \quad \alpha\, \mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\, J_0(\mu_n l_r)$$

Revenons au cas $\varphi_2(t) = T_s\, t$ *alors il vient :*

$$T(r,t) = \frac{2\alpha\,\beta\,T_s}{l_r\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)}\left((\delta\,\mu_n^{\,2}t-1)+e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\right)$$

$$T(r,t) = T_s t\underbrace{\frac{2\alpha\,\beta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)}}_{=1} - \frac{2\alpha\,\beta\,T_s}{l_r\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)} +$$

$$+\frac{2\alpha\,\beta\,T_s}{l_r\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)}$$

$$Or\ \frac{2\alpha\,\beta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)} = 1$$

$$Et\ \frac{2\alpha}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4\beta}{\mu_n^{\,2}}-2\alpha\,l_r\right)\frac{J_0(\mu_n r)}{\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)} = l_r^{\,2}-r^2$$

$$\Rightarrow \frac{2\alpha\beta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)} = \frac{1}{4}\left(l_r^{\,2}-r^2+\frac{2\alpha\,l_r}{\beta}\right)$$

$$\Rightarrow T(r,t) = T_s t - \frac{T_s l_r^{\,2}}{4\delta}\left(1-\frac{r^2}{l_r^{\,2}}+\frac{2\alpha}{\beta\,l_r}\right)+\frac{2\alpha\,\beta\,T_s}{l_r\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}\left(\beta^2+\alpha^2\mu_n^{\,2}\right)J_0(\mu_n l_r)}$$

$$avec\quad \mu_n\quad tq\quad \alpha\,\mu_n J_1(\mu_n l_r) = \beta\,J_0(\mu_n l_r)$$

<u>Problème de diffusion sur une cylindre : condition initiale et conditions aux limites de Neumann</u>

Cas n=2, avec condition de Neuman (flux imposé) sur la surface, la condition en r=0 se réduit à une condition de finitude :

Voir page 203 et suivante du Livre de «H.S.Carslaw.J.C.Jaeger-Conduction of Heat in Solids » (page 211 pdf)

$$\Delta T(r,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = 0 \quad T(r,t) = U(r)W(t)$$

$$\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}+\mu^2 U(r) = 0 \quad \frac{\partial W(t)}{\partial t}+\delta\,\mu^2 W(t) = 0$$

$$C.L.\quad T(0,t)\ fini \quad C.L.\quad \frac{\partial T(l_r,t)}{\partial r} = \varphi_2(t) \quad C.I.\quad T(r,0) = f(r)$$

On peut ramener la solution à l'addition des solutions des deux problèmes suivants :

$$T(r,t) = T_u(r,t)+T_w(r,t) \qquad \begin{cases} C.L. & T_u(0,t)\quad fini \\ C.L. & \dfrac{\partial T_u(l_r,t)}{\partial r} = 0 \\ C.I. & T_u(r,0) = f(r) \end{cases} \qquad \begin{cases} C.L. & T_w(0,t)\quad fini \\ C.L. & \dfrac{\partial T_w(l_r,t)}{\partial r} = \varphi_2(t) \\ C.I. & T_w(r,0) = 0 \end{cases}$$

.

La première solution est une solution homogène qui bien sûr doit comprendre la solution constante correspondant à la valeur propre nulle et donc se développe comme suit :

$$\mu \to \mu_n \quad tq \quad J_1(\mu_n l_r) = 0 \quad \Phi_n(r) = J_0(\mu_n r) \quad \|\Phi_n(r)\|^2 = \int_0^{l_r} dr\, r\left(J_0(\mu_n r)\right)^2 = \frac{l_r^{\,2}}{2} J_0(\mu_n l_r)^2$$

$$Car \quad \frac{\Phi'_n(r)}{\mu_n} = J_1'(\mu_n r) \Rightarrow \frac{\Phi'_n(l_r)}{\mu_n} = 0 \quad \|\Phi_n(r)\|^2 = \left[\frac{r^2}{2}\left(\left(\frac{\Phi'_n(r)}{\mu_n}\right)^2 + \Phi_n(r)^2\right)\right]_0^{l_r} = \frac{l_r^{\,2} J_0(\mu_n l_r)^2}{2}$$

$$T_u(r,t) = \frac{2A_0}{l_r^{\,2}} + \frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2} t} A_n \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0(\mu_n l_r)^2} \Rightarrow T_u(r,0) = f(r) \quad A_0 = \int_0^{l_r} dr\, r\, f(r) \quad A_n = \int_0^{l_r} dr\, r\, f(r)\, J_0(\mu_n r)$$

$$Si \quad f(r) = F_0 \Rightarrow A_n = F_0 \int_0^{l_r} dr\, r\; J_0(\mu_n z) = \frac{F_0}{\mu_n^{\,2}} \int_0^{\mu_n l_r} dz\, z J_0(z) = \frac{F_0}{\mu_n^{\,2}} \mu_n J_1(\mu_n l_r) = 0 \Rightarrow T_u(r,t) = F_0$$

Avant de parler de la seconde solution, choisissons dans ce premier problème une fonction initiale proportionnelle au carré du rayon, comme suit :

$$Si \quad f(r) = \frac{r^2}{2l_r} \Rightarrow A_0 = \int_0^{l_r} dr\, r\; \frac{r^2}{2l_r} = \frac{1}{2l_r}\int_0^{l_r} dr\, r^3 = \frac{l_r^{\,3}}{8} \quad A_n = \frac{1}{2l_r}\int_0^{l_r} dr\, r^3 J_0(\mu_n z) = \frac{1}{2l_r \mu_n^{\,4}} \int_0^{\mu_n l_r} dz\, z^3 J_0(z)$$

$$En\ vertu\ de \begin{cases} J_{\nu+1}(\alpha) + J_{\nu-1}(\alpha) = \dfrac{2\nu}{\alpha} J_\nu(\alpha) \quad sachant\ que\ J_1(\alpha) = 0 \\ \displaystyle\int_0^{\alpha} dz\, z^{\lambda} J_\nu(z) = \alpha^{\lambda} J_{\nu+1}(\alpha) + (\nu + 1 - \lambda)\int_0^{\alpha} dz\, z^{\lambda-1} J_{\nu+1}(z) \\ \displaystyle\int_0^{\alpha} dz\, z^{\nu+1} J_\nu(z) = \alpha^{\nu+1} J_{\nu+1}(\alpha) \end{cases}$$

$$Posons \quad \alpha_n = \mu_n l_r \Rightarrow \int_0^{\alpha_n} dz\, z^3 J_0(z) = (1-3)\int_0^{\alpha} dz\, z^2 J_1(z) = -2\alpha^2 J_2(\alpha) \Leftarrow J_2(\alpha) + J_0(\alpha) = \frac{2}{\alpha} J_1(\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} dz\, z^3 J_0(z) = -2\alpha^2 J_2(\alpha) = 2\alpha^2 J_0(\alpha) \Rightarrow A_n = \frac{2\alpha_n^{\,2} J_0(\alpha_n)}{2l_r \mu_n^{\,4}} = \frac{l_r J_0(\mu_n l_r)}{\mu_n^{\,2}}$$

$$\Rightarrow \frac{r^2}{2l_r} = \frac{2A_0}{l_r^{\,2}} + \frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \frac{J_0(\mu_n r)}{J_0(\mu_n l_r)^2} = l_r\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n l_r)}\right)$$

Dans ce dernier cas on constate que le flux net initial à travers la section r=lr est le suivant, même le flux net à travers le temps lui est construit de manière à rester nul :

$$\frac{\partial T_u(l_r,0)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{2l_r}\right)\Bigg|_{r=l_r} = \frac{r}{l_r}\Bigg|_{r=l_r} = 1$$

$$T_u(l_r,t) = l_r\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2} t} \frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n l_r)}\right) \Rightarrow \frac{\partial T_u(l_r,t)}{\partial r} = 0 \quad T_u(l_r,0) = \frac{r^2}{2l_r}$$

Dans ce cas alors la fonction construite comme suit :

$$T_u(l_r,t)=\frac{r^2}{2l_r}-l_r\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}J_0(\mu_n l_r)}\right)\Rightarrow\frac{\partial T_u(l_r,0)}{\partial r}=0\quad\frac{\partial T_u(l_r,t)}{\partial r}=1\quad T_u(l_r,0)=0$$

Mais cette dernière de respecte plus l'équation initiale de diffusion par l'adjonction du terme radiale quadratique. En effet :

$$T_u(r,t)=\frac{r^2}{2l_r}-l_r\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}J_0(\mu_n l_r)}\right)\Rightarrow\underbrace{\frac{\partial^2 T_u(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_u(r,t)}{\partial r}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial t}T_u(r,t)}_{\Delta T(r,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial t}T(r,t)=\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial t}T(r,t)=0}=\frac{2}{2l_r}+\frac{1}{r}\frac{r}{l_r}=\frac{2}{l_r}$$

Pour compenser ce défaut de respect de l'équation de diffusion, il suffit de rajouter un terme sans dépendance spatiale et proportionnel au temps. Ce qui donne :

$$T_v(r,t)=\frac{2t\delta}{l_r}+\frac{r^2}{2l_r}-l_r\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}J_0(\mu_n l_r)}\right)\Rightarrow\underbrace{\frac{\partial^2 T_v(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_v(r,t)}{\partial r}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial t}T_v(r,t)}_{\Delta T(r,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial t}T(r,t)=\frac{\partial^2 T(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T(r,t)}{\partial r}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial t}T(r,t)=0}=\frac{2}{l_r}-\frac{2}{l_r}=0$$

Le terme rajouté ne change pas ni la valeur initiale, ni la valeur du flux à la surface cylindrique. En conclusion de cette brève digression, il est clair que la fonction suivante :

$T_v(r,t)=\dfrac{2t\delta}{l_r}+l_r\left(\dfrac{r^2}{2l_r^{\,2}}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{l_r^{\,2}}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\dfrac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2}J_0(\mu_n l_r)}\right)$ *est solution du problème de diffusion suivant :* $\Delta T_v(r,t)-\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial}{\partial t}T_v(r,t)\quad\begin{cases}C.L.\quad T_v(0,t)\quad fini\\ C.L.\quad \dfrac{\partial T_v(l_r,t)}{\partial r}=1\\ C.I.\quad T_v(r,0)=0\end{cases}$

Remarque : il s'avère que j'ai un peu triché, même si le terme est un peu fort. Jugez-en, en consultant les pages 203 et suivante du Livre de «H.S.Carslaw.J.C.Jaeger-Conduction of Heat in Solid », on connaît déjà la solution. Toutefois il est facile d'avoir l'intuition du terme quadratique, sachant que le flux d'un terme radial quadratique est linéaire en r, et qu'il est facile d'y ajouter un terme temporel qui contrebalance le non-respect de l'équation de Helmholtz de manière à préserver l'équation de diffusion. Toute autre adjonction d'un terme radial de puissance quelconque, autre que deux, ne pourrait conduire au respect de l'équation de diffusion. Donc le choix est vite fait ! Le reste n'est que du calcul d'intégrales de Bessel. Et comme cela on s'épargne de travailler avec les transformations de Laplace, car dans cet ouvrage, j'ai préféré éviter les opérations de transformations intégrales délicates pour lesquels la transformation inverse se déroule sur le plan complexe (comme Laplace, Mellin) : une de mes lacunes sur le calcul des résidus ! C'est d'ailleurs pour cela que dans l'ouvrage je m'en suis tenu à des transformations intégrales dont la transformation inverse demeure une intégrale classique. C'est le cas des transformations de Fourier, de Kontorovich-Lebedev, de Mehler-Fock, Log-Sinus, Log-Cosinus qui toutes ont outre ce point commun mentionné, celui d'être construite à partir d'un raisonnement de séparation des variables. Certes les transformations inverses de ces dernières sont construites à partir d'intégrale sur le plan complexe mais qui sont rigoureusement démontrés par les auteurs, et qui ont l'avantage d'aboutir à des intégrales classiques, dont j'utilise finalement le théorème d'inversion.

Revenons à nos moutons, la seconde solution utilise les résultats du théorème de Duhamel :

<u>*Application du théorème de Duhamel à la solution*</u>

La solution du problème $T_w(r,t)$ $\begin{cases} C.L. & T_w(0,t) \quad fini \\ C.L. & \dfrac{\partial T_w(l_r,t)}{\partial r} = \varphi_2(t) \\ C.I. & T_w(r,0) = 0 \end{cases}$

est dérivée du problème à flux fixé aux limites du domaine : $T_w(r,\lambda,t) = \varphi_2(\lambda) T_{w2}(r,t)$ $\begin{cases} C.L. & T_{w2}(0,t) \quad fini \\ C.L. & \dfrac{\partial T_{w2}(l_r,t)}{\partial r} = 1 \\ C.I. & T_{w2}(r,0) = 0 \end{cases}$

A l'aide de la remarque précédente sur la fonction limite la solution du problème à flux normalisé est la suivante : $T_{w2}(l_r,t) = \dfrac{2t\delta}{l_r} + l_r\left(\dfrac{r^2}{2l_r^{\,2}} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\dfrac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n l_r)}\right)$

Ce qui donne pour la solution du problème initial de Duhamel :

$$\mu_n \to J_1(\mu_n l_r) = 0 \qquad T_w(r,\lambda,t) = \varphi_2(\lambda)\left\{\frac{2t\delta}{l_r} + l_r\left(\frac{r^2}{2l_r^{\,2}} - \frac{1}{4} - \frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n l_r)}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow T_w(r,\lambda,t-\lambda) = \varphi_2(\lambda)\left\{\frac{2(t-\lambda)\delta}{l_r} + l_r\left(\frac{r^2}{2l_r^{\,2}} - \frac{1}{4} - \frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}(t-\lambda)}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n l_r)}\right)\right\}$$

Et par application du théorème de Duhamel :

Posons $F_2(r,t-\lambda) = \dfrac{2(t-\lambda)\delta}{l_r} + l_r\left(\dfrac{r^2}{2l_r^{\,2}} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}(t-\lambda)}\,\dfrac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n l_r)}\right)$

$$\frac{\partial}{\partial t}F_2(r,t-\lambda) = \frac{2\delta}{l_r} + \frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty} \mu_n^{\,2} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}(t-\lambda)}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n^{\,2} J_0(\mu_n l_r)} = \frac{2\delta}{l_r} + \frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}(t-\lambda)}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_0(\mu_n l_r)}$$

$$T_w(r,t) = \int_0^t d\lambda \varphi_2(\lambda)\,\frac{\partial}{\partial t}F_2(r,t-\lambda) \Rightarrow T_w(r,t) = \frac{2\delta}{l_r}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)\right) + \frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_0(\mu_n l_r)}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda) e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}\right)$$

Ce qui donne la solution complète du problème à deux dimensions :

$$\mu_n \to J_1(\mu_n l_r) = 0 \quad A_0 = \int_0^{l_r} dr\; r\, f(r) \quad A_n = \int_0^{l_r} dr\; r\, f(r)\, J_0(\mu_n r)$$

$$T(r,t) = \frac{2A_0}{l_r^{\,2}} + \frac{2}{l_r^{\,2}}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t} A_n\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_0(\mu_n l_r)^2} + \frac{2\delta}{l_r}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)\right) + \frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_0(\mu_n l_r)}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda) e^{\delta\,\mu_n^{\,2}\lambda}\right)$$

.

Pour un flux constant égal à 1, et une température initiale nul, il vient :

$$T(r,t)=\frac{2\delta t}{l_r}+\frac{2\delta}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{J_0(\mu_n l_r)}\left(\int_0^t d\lambda\; e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}\right)=\frac{2\delta t}{l_r}+\frac{2\delta}{l_r\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^2 J_0(\mu_n l_r)}\left[e^{\delta\mu_n{}^2 t}-1\right]$$

$$\Rightarrow T(r,t)=\frac{2\delta}{l_r}t+\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^2 J_0(\mu_n l_r)}-\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^2 J_0(\mu_n l_r)}$$

De plus $\quad \dfrac{r^2}{2l_r{}^2}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{l_r{}^2}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^2 J_0(\mu_n l_r)}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^2 J_0(\mu_n l_r)}=\frac{l_r{}^2}{2}\left(\frac{r^2}{2l_r{}^2}-\frac{1}{4}\right)$

$$\Rightarrow T(r,t)=\frac{2\delta}{l_r}t+l_r\left(\frac{r^2}{2l_r{}^2}-\frac{1}{4}-\frac{2}{l_r{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^2 J_0(\mu_n l_r)}\right)$$

Avec un flux F_0 constant, il vient :

$$T(r,t)=F_0\left\{\frac{2\delta}{l_r}t+l_r\left(\frac{r^2}{2l_r{}^2}-\frac{1}{4}-\frac{2}{l_r{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\,\frac{J_0(\mu_n r)}{\mu_n{}^2 J_0(\mu_n l_r)}\right)\right\}$$

On retrouve bien les deux solutions données dans le livre de «H.S.Carslaw.J.C.Jaeger-Conduction of Heat in Solid » des pages 203 et 204 (à part une substitution dans la première F_0->F_0/K).

<u>Problème de diffusion sur une sphère: condition initiale et conditions aux limites de Dirichlet</u>

Cas n=3 : sur la sphère le problème de diffusion sous forme séparé s'écrit *(voir page 233 du Livre de H.S.Carslaw et J.C. Jaeger, Conduction of Heat in Solids) :*

$$\Delta T(r,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=0\quad T(r,t)=U(r)W(t)$$

$$U(r)=\frac{V(r)}{r}\quad \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2}+\mu^2 V(r)=0\quad \frac{\partial W(t)}{\partial t}+\delta\,\mu^2 W(t)=0\quad \Psi(r,t)=rT(r,t)=V(r)W(t)$$

$$\textit{Finitude}\quad T(0,t)=0\qquad \begin{cases} C.L. & T(l_r,t)=\varphi(t)\\ C.I. & T(r,0)=f(r)\end{cases}$$

La solution est donc à rapprocher de la solution particulière sur la ligne avec une première fonction limite nulle :

$$\frac{\partial^2\Psi(r,t)}{\partial r^2}+\mu^2 T(r,t)=0\qquad \begin{cases} C.L. & \Psi(0,t)=0\\ C.L. & \Psi(l_r,t)=l_r\,\varphi_2(t)\\ C.I. & \Psi(r,0)=r\,f(r)\end{cases}$$

En s'inspirant des calculs réalisés à une dimension, il suffit de diviser le résultat par r soit :

$$T(r,t)=\frac{2}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\left(\int_0^{l_r}dz\;z\;f(z)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)-n\delta\,\pi(-1)^n\int_0^t d\lambda\;\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}\right)$$

$$\textit{avec}\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale nulle, valeur fixe en surface $f(r)=0 \quad \varphi_2(t)=T_s$ *:*

$$T(r,t)=-\frac{2\delta\,\pi\,T_s}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}n(-1)^n e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^t d\lambda\; e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}$$

$$\int_0^t d\lambda\; e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}=\frac{1}{\delta\;\mu_n{}^2}\left(e^{\delta\,\mu_n{}^2 t}-1\right)$$

$$T(r,t)=\frac{2\,l_r T_s}{r\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\left(1-e^{\delta\,\mu_n{}^2 t}\right)=\frac{2\,l_r T_s}{r\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)-\frac{2\,l_r T_s}{r\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$Comme\int_0^{l_r}dr\,r\,Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)=\frac{-(-1)^n l_r{}^2}{n\pi}\Rightarrow r=-\frac{2l_r}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\Rightarrow-\frac{2l_r}{r\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)=1$$

$$T(r,t)=T_s+\frac{2\,T_s}{\pi}\frac{l_r}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\quad avec\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale nulle, valeur linéaire en temps en surface $f(r)=0 \quad \varphi_2(t)=t\,T_s$ *:*

$$T(r,t)=-\frac{2\delta\,\pi\,T_s}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}n(-1)^n e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^t d\lambda\;\lambda\;e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}$$

$$T(r,t)=-\frac{2\delta\,T_s}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n(-1)^n e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin(\mu_n\,r)\int_0^t d\lambda\;\lambda\;e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}$$

$$\int_0^t d\lambda\;\lambda\;e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}=\left[\frac{(\delta\;\mu_n{}^2\lambda-1)e^{\delta\,\mu_n{}^2\lambda}}{\left(\delta\;\mu_n{}^2\right)^2}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=t}=\frac{1}{\left(\delta\;\mu_n{}^2\right)^2}\left((\delta\;\mu_n{}^2 t-1)e^{\delta\,\mu_n{}^2 t}+1\right)$$

$$T(r,t)=-\frac{2\,l_r{}^3 T_s}{r\pi^3\;\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\left(\delta\;\mu_n{}^2 t-1+e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}\right)=$$

$$=-T_s t\frac{2\,l_r}{r\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)+T_s\frac{2\,l_r{}^3}{r\pi^3\;\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)-\frac{2\,l_r{}^3 T_s}{r\pi^3\;\delta}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}$$

$$Comme\int_0^{l_r}dz\,z\,Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=\frac{-(-1)^n l_r{}^2}{n\pi}\Rightarrow r=-\frac{2l_r}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\Rightarrow-\frac{2l_r}{r\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)=1$$

$$et\quad\int_0^{l_r}dz\left(z^3-l_r{}^2 z\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=\frac{6(-1)^n l_r{}^4}{n^3\pi^3}\Rightarrow\frac{1}{6r\delta}\frac{2}{l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{6(-1)^n l_r{}^4}{n^3\pi^3}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)=\frac{\left(r^3-l_r{}^2 r\right)}{6r\delta}=\frac{\left(r^2-l_r{}^2\right)}{6\delta}$$

$$d'où\Rightarrow T(r,t)=T_s t+T_s\frac{\left(r^2-l_r{}^2\right)}{6\delta}-\frac{2\,T_s l_r{}^3}{\delta\;r\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}e^{-\delta\,\mu_n{}^2 t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\quad avec\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

.

Cas n=3, valeur initiale nulle, valeur sinusoïdale dans le temps en surface $f(r)=0 \quad \varphi_2(t)=T_s Sin(\omega t+\varepsilon)$ *(calcul d'une onde de température):*

$$\varphi_2(\lambda)=T_s Sin(\omega\lambda+\varepsilon)$$

$$T(r,t)=-\frac{2\delta\pi T_s}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty} n(-1)^n e^{-\delta\mu_n{}^2 t} Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^t d\lambda\; Sin(\omega\lambda+\varepsilon)\, e^{\delta\mu_n{}^2\lambda}$$

$$T(r,t)=-\frac{2\delta T_s}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}\mu_n(-1)^n e^{-\delta\mu_n{}^2 t} Sin(\mu_n r)\int_0^t d\lambda\; Sin(\omega\lambda+\varepsilon)\, e^{\delta\mu_n{}^2\lambda}$$

$$\int_0^t d\lambda\; Sin(\omega\lambda+\varepsilon)\, e^{\delta\mu_n{}^2\lambda}=\frac{\omega\, Cos(\varepsilon)\text{-}\delta\,\mu_n{}^2 Sin(\varepsilon)+e^{\delta\mu_n{}^2 t}(\text{-}\omega\text{-}\omega Cos\, t+\varepsilon)+\delta\,\mu_n{}^2 Sin(\omega t+\varepsilon))}{\omega^2+\delta^2\mu_n{}^4}$$

$$T(r,t)=\frac{2\delta\pi\, l_r T_s}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n\, Sin(\mu_n r)\frac{\left(\delta\, n^2\pi^2 Sin(\varepsilon)-\omega l_r{}^2 Cos(\varepsilon)\right)e^{-\delta\mu_n{}^2 t}+\omega l_r{}^2 Cos(\omega t+\varepsilon)\text{-}\delta\, n^2\pi^2 Sin(\omega t+\varepsilon)}{\omega^2 l_r{}^4+\delta^2 n^4\pi^4}$$

$$T(r,t)=\frac{2\delta\pi\, l_r T_s}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n\, Sin(\mu_n r)\frac{\omega l_r{}^2 Cos(\omega t+\varepsilon)\text{-}\delta\, n^2\pi^2 Sin(\omega t+\varepsilon)}{\omega^2 l_r{}^4+\delta^2 n^4\pi^4}+$$

$$+\frac{2\delta\pi\, l_r T_s}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n\, Sin(\mu_n r)\frac{\left(\delta\, n^2\pi^2 Sin(\varepsilon)-\omega l_r{}^2 Cos(\varepsilon)\right)e^{-\delta\mu_n{}^2 t}}{\omega^2 l_r{}^4+\delta^2 n^4\pi^4}\quad avec\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale fixe, valeur nulle en surface $f(r)=T_s \quad \varphi_2(t)=0$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\mu_n{}^2 t} Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^{l_r} dz\; z\; Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)\qquad \int_0^{l_r} dz\; z\; Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=\frac{(-1)^{n+1} l_r{}^2}{n\pi}$$

$$T(r,t)=-\frac{2T_s}{\pi}\frac{l_r}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n e^{-\delta\mu_n{}^2 t}}{n} Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\quad avec\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale linéaire, valeur nulle en surface $f(r)=T_s(l_r-r)/l_r \quad \varphi_2(t)=0$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{r\,l_r{}^2}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\mu_n{}^2 t} Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^{l_r} dz\; z\,(l_r-z) Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)$$

$$\int_0^{l_r} dz\; z\,(l_r-z) Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=\frac{2l_r{}^3}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)$$

$$T(r,t)=\frac{8T_s l_r}{r\,\pi^3}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{e^{-\delta\mu_{2l+1}{}^2 t}}{(2l+1)^3} Sin\left(\frac{(2l+1)\pi}{l_r}r\right)$$

$$avec\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale quadratique, valeur nulle en surface $f(r)=T_s\left(l_r^{\,2}-r^2\right)/l_r^{\,2} \quad \varphi_2(t)=0$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{r\,l_r^{\,3}}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^{l_r}dz\;z\left(l_r^{\,2}-z^2\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)$$

$$\int_0^{l_r}dz\;z\left(l_r^{\,2}-z^2\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=\frac{6\,l_r^{\,4}(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

$$T(r,t)=\frac{12T_s l_r}{r\,\pi^3}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{(-1)^n}{n^3}\,Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$avec \quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale $f(r)=\frac{T_s}{r}Sin\left(\frac{\pi\,r}{l_r}\right)$*, valeur nulle en surface* $\varphi_2(t)=0$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^{l_r}dz\;Sin\left(\frac{\pi\,z}{l_r}\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)$$

$$\int_0^{l_r}dz\;Sin\left(\frac{\pi\,z}{l_r}\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=\frac{l_r}{2}\delta_{n,1}$$

$$T(r,t)=\frac{T_s}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\delta_{n,1}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)=\frac{T_s}{r}e^{-\frac{\delta\,\pi^2 t}{l_r^{\,2}}}Sin\left(\frac{\pi}{l_r}r\right)$$

$$avec \quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale $f(r)=T_s\left(e^{\alpha(r-l_r)}-1\right)$*, valeur nulle en surface* $\varphi_2(t)=0$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^{l_r}dz\;z\left(e^{\alpha(r-l_r)}-1\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)$$

$$\int_0^{l_r}dz\;z\left(e^{\alpha(r-l_r)}-1\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=\frac{l_r^{\,3}\alpha\left(-2e^{-\alpha l_r}n^2\pi^2+(-1)^n\left(l_r^{\,3}\alpha^3+n^2\pi^2(2+l_r\alpha)\right)\right)}{n\pi\left(n^2\pi^2+l_r^{\,2}\alpha^2\right)^2}$$

$$T(r,t)=\frac{2T_s l_r^{\,2}\alpha}{r\,\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{\left(-2e^{-\alpha l_r}n^2\pi^2+(-1)^n\left(l_r^{\,3}\alpha^3+n^2\pi^2(2+l_r\alpha)\right)\right)}{n\left(n^2\pi^2+l_r^{\,2}\alpha^2\right)^2}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$avec \quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale $f(r)=T_s e^{\alpha(r-l_r)}$*, valeur nulle en surface* $\varphi_2(t)=0$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^{l_r}dz\;z\,e^{\alpha(r-l_r)}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)$$

$$\int_0^{l_r}dz\;z\,e^{\alpha(r-l_r)}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=\frac{l_r^{\,2}n\pi\left(-2l_r\alpha\,e^{-\alpha l_r}-(-1)^n\left(n^2\pi^2-2l_r\alpha+l_r^{\,2}\alpha^2\right)\right)}{\left(n^2\pi^2+l_r^{\,2}\alpha^2\right)^2}$$

$$T(r,t)=\frac{2l_r T_s\pi}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\,\frac{n\left(-2l_r\alpha\,e^{-\alpha l_r}-(-1)^n\left(n^2\pi^2-2l_r\alpha+l_r^{\,2}\alpha^2\right)\right)}{\left(n^2\pi^2+l_r^{\,2}\alpha^2\right)^2}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$avec \quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale $f(r)=\begin{cases} T_s & 0<r<b \\ 0 & b<r<l_r \end{cases}$ *, valeur nulle en surface* $\varphi_2(t)=0$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^b dz\;z\;Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)$$

$$\int_0^b dz\;z\;Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=\frac{l_r^{\,2}}{n^2\pi^2}\left(Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}b\right)-\frac{n\pi}{l_r}b\,Cos\left(\frac{n\pi}{l_r}b\right)\right)$$

$$T(r,t)=\frac{2T_s l_r}{r\,\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}}{n^2}\left(Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}b\right)-\frac{n\pi}{l_r}b\,Cos\left(\frac{n\pi}{l_r}b\right)\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$avec\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Cas n=3, valeur initiale $f(r)=T_0+T_1r+T_2r^2+T_3r^3$ *, valeur nulle en surface* $\varphi_2(t)=0$ *:*

$$T(r,t)=\frac{2T_s}{r\,l_r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)\int_0^{l_r}dz\;z\left(T_0+T_1z+T_2z^2+T_3z^3\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)$$

$$\int_0^{l_r}dz\;z\left(T_0+T_1z+T_2z^2+T_3z^3\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}z\right)=l_r^{\,2}\left(T_0A_{0n}+T_1A_{1n}+T_2A_{2n}+T_3A_{3n}\right)$$

$$A_{0n}=\frac{-(-1)^n}{n\pi}$$

$$A_{1n}=\frac{l_r\left((-1)^n\left(2-n^2\pi^2\right)-2\right)}{n^3\pi^3}$$

$$A_{2n}=-\frac{l_r^{\,2}(-1)^n\,n\pi\left(n^2\pi^2-6\right)}{n^4\pi^4}$$

$$A_{3n}=\frac{l_r^{\,3}\left(24-(-1)^n\left(n^4\pi^4-12n^2\pi^2+24\right)\right)}{n^5\pi^5}$$

$$T(r,t)=\frac{2l_r}{r}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\left(T_0A_{0n}+T_1A_{1n}+T_2A_{2n}+T_3A_{3n}\right)Sin\left(\frac{n\pi}{l_r}r\right)$$

$$avec\quad \mu_n=\frac{n\pi}{l_r}$$

Problème de diffusion sur une hypersphère: condition initiale et conditions aux limites de Dirichlet

Cas d'une dimension quelconque n>=3 : dans ce cas la condition de finitude en r=0 coïncide avec la valeur nulle en r=0, condition de Dirichlet température imposée à la surface de l'hypersphère.

$$\Delta T(r,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=0 \quad T(r,t)=U(r)W(t)\Rightarrow U''(r)+\frac{n-1}{r}U'(r)+\mu^2U(r)=0 \quad \frac{\partial W(t)}{\partial t}+\delta\,\mu^2W(t)=0$$

$$U(r)\propto r^{\frac{2-n}{2}}\left(A\,J_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)+B\,Y_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)\right) \qquad W(t)\propto e^{-\delta\,\mu^2 t}$$

$$\left.\begin{array}{l} C.L.\quad T(0,t)\quad fini \\ C.L.\quad T(l_r,t)=\varphi_2(t) \\ C.I.\quad T(r,0)=f(r)\end{array}\right\} \quad n=3\Rightarrow U(r)\propto\frac{1}{\sqrt{r}}\left(A\,J_{\frac{1}{2}}(\mu\,r)+B\,Y_{\frac{1}{2}}(\mu\,r)\right) \quad J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi\,x}}Sin(x) \quad Y_{\frac{1}{2}}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi\,x}}Cos(x)$$

$$n=3\Rightarrow U(r)\propto\frac{1}{r}\left(A\,Cos(\mu\,r)+B\,Sin(\mu\,r)\right)$$

La condition de finitude en r=0 impose d'après les développements autour de z=0 :

$$J_\nu(z)\approx\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left(1-\frac{z^2}{4(\nu+1)}\right) \quad Y_\nu(z)\approx-\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\left(1-\frac{z^2}{4(1-\nu)}\right)-\frac{Cos(\pi\nu)\Gamma(-\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\left(1-\frac{z^2}{4(\nu+1)}\right)$$

$$r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)\approx r^{\frac{2-n}{2}}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\mu\,r}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\approx\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\ fini$$

$$r^{\frac{2-n}{2}}Y_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)\approx-r^{\frac{2-n}{2}}\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{\mu\,r}{2}\right)^{\frac{2-n}{2}}\propto r^{2-n}\Rightarrow\lim_{r\to0}\left(r^{\frac{2-n}{2}}Y_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)\right)=-\infty$$

$$\Rightarrow U(r)\propto r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r) \quad \textit{également pour } n=3 \quad U(r)\propto\frac{Sin(\mu\,r)}{r}$$

On peut ramener la solution à l'addition des solutions des deux problèmes suivants :

$$T(r,t)=T_u(r,t)+T_w(r,t) \qquad \begin{cases} C.L.\quad T_u(0,t)\quad fini \\ C.L.\quad T_u(l_r,t)=0 \\ C.I.\quad T_u(r,0)=f(r)\end{cases} \quad \begin{cases} C.L.\quad T_w(0,t)\quad fini \\ C.L.\quad T_w(l_r,t)=\varphi_2(t) \\ C.I.\quad T_w(r,0)=0\end{cases}.$$

La première solution est une solution homogène qui se développe à l'aide des fonctions propres, solution d'une équation différentielles cylindriques :

$$U''(r)+\frac{n-1}{r}U'(r)+\mu^2U(r)=0 \quad Posons\ U(r)=r^{\frac{2-n}{2}}V(r)\Rightarrow U'(r)=r^{\frac{2-n}{2}}V'(r)+\left(\frac{2-n}{2}\right)r^{-\frac{n}{2}}V(r)$$

$$U''(r)=r^{\frac{2-n}{2}}V''(r)+(2-n)r^{-\frac{n}{2}}V'(r)-\left(\frac{2-n}{2}\right)\frac{n}{2}r^{-\frac{2+n}{2}}V(r)$$

$$r^{\frac{2-n}{2}}V''(r)+(2-n)r^{-\frac{n}{2}}V'(r)-\left(\frac{2-n}{2}\right)\frac{n}{2}r^{-\frac{2+n}{2}}V(r)+\frac{n-1}{r}\left(r^{\frac{2-n}{2}}V'(r)+\left(\frac{2-n}{2}\right)r^{-\frac{n}{2}}V(r)\right)+\mu^2r^{\frac{2-n}{2}}V(r)=0$$

$$r^{\frac{2-n}{2}}V''(r)+r^{-\frac{n}{2}}V'(r)+r^{-\frac{n}{2}}V(r)\left(\mu^2r-\left(\frac{n-2}{2}\right)\frac{n-2}{2r}\right)=0$$

$$r^2V''(r)+rV'(r)+V(r)\left(\mu^2r^2-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right)=0\Rightarrow V(r)\propto\left(A\,J_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)+B\,Y_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)\right)\Rightarrow U(r)\propto r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu\,r)$$

Les solutions composées de fonctions de Bessel sont orthogonales entre-elles pour des valeurs propres différentes, car elles se présentent comme solution d'un système régulier de Sturm-Liouville où p(z)=z, w(z)=z, s(z)=(n-2)²/(4z) : $z^2U''(z)+zU'(z)+\left[\mu_{n,l}{}^2z^2-\left(\frac{n-2}{2}\right)^2\right]U(z)=0\cdot$

Il vient par conséquent une solution développée en série de fonctions propres aux valeur propres données par une équation transcendantale :

$$\mu\to\mu_{n,l}\quad tq\quad J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=0\quad T_u(r,t)=\sum_{l=1}^{+\infty}B_{n,l}e^{-\delta\,\mu_{n,l}{}^2t}r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)\quad \Phi_{n,l}(r)=r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)\quad \Phi_{n,l}(l_r)=0$$

$$\left\langle\Phi_{n,l}(r),\Phi_{n,m}(r)\right\rangle=\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}\Phi_{n,l}(r)\Phi_{n,m}(r)=\int_0^{l_r}dr\,r\,J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,m}r\right)=0\quad si\quad l\neq m\quad voir\ ci-après$$

$$\Phi_{n,l}'(r)=r^{\frac{2-n}{2}}\frac{\partial J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{\partial r}+\frac{2-n}{2}r^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)=\mu_{n,l}r^{\frac{2-n}{2}}\left(J_{\frac{n-4}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)-\frac{n-2}{2\mu_{n,l}r}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)\right)+\frac{2-n}{2}r^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)$$

$$\Rightarrow\Phi_{n,l}'(r)=\mu_{n,l}r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-4}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)+(2-n)r^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)\Rightarrow\frac{\Phi_{n,l}'(l_r)}{\mu_{n,l}}=J_{\frac{n-4}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=-J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)$$

Relation de récurrence $\quad J_{\frac{n-4}{2}}(x)+J_{\frac{n}{2}}(x)=\frac{n-2}{x}J_{\frac{n-2}{2}}(x)\Rightarrow J_{\frac{n-4}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=-J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)$

Le calcul de la norme des fonctions propres se fait comme suit par le calcul classique :

$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad U_{\mu_1}''(r)+\frac{n-1}{r}U_{\mu_1}'(r)+\mu_1{}^2U_{\mu_1}(r)=0\\(2)\quad U_{\mu_2}''(r)+\frac{n-1}{r}U_{\mu_2}'(r)+\mu_2{}^2U_{\mu_2}(r)=0\end{array}\right\}\Rightarrow r^{n-1}\left(U_{\mu_2}(r)(1)-U_{\mu_1}(r)(2)\right)=0$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\left(U_{\mu_1}'(r)U_{\mu_2}(r)-U_{\mu_2}'(r)U_{\mu_1}(r)\right)\right]+r^{n-1}U_{\mu_1}(r)U_{\mu_2}(r)\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)=0$$

$$\Rightarrow\int_0^{l_r}dr\frac{d}{dr}\left[r^{n-1}\left(U_{\mu_1}'(r)U_{\mu_2}(r)-U_{\mu_2}'(r)U_{\mu_1}(r)\right)\right]=-\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}U_{\mu_1}(r)U_{\mu_2}(r)\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)$$

$$\Rightarrow\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}U_{\mu_1}(r)U_{\mu_2}(r)=-\left[r^{n-1}\left(U_{\mu_1}'(r)U_{\mu_2}(r)-U_{\mu_2}'(r)U_{\mu_1}(r)\right)\right]_0^{l_r}$$

Orthogonalité $\quad si\quad \mu_1\neq\mu_2\Rightarrow\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}U_{\mu_1}(r)U_{\mu_2}(r)=0$

Norme $\quad \mu_1=\mu\quad \mu_2=\mu+d\mu\Rightarrow U_{\mu_1}(r)=U_{\mu}(r)\quad U_{\mu_2}(r)=U_{\mu}(r)+d\mu\frac{\partial U_{\mu}(r)}{\partial\mu}$

$$\frac{\partial U_{\mu_2}(r)}{\partial r}=\frac{\partial U_{\mu}(r)}{\partial r}+d\mu\frac{\partial^2U_{\mu}(r)}{\partial\mu\partial r}\Rightarrow\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}\left(U_{\mu}(r)\right)^2=\frac{1}{2\mu}\left[r^{n-1}\left(\frac{\partial U_{\mu}(r)}{\partial r}\frac{\partial U_{\mu}(r)}{\partial\mu}-U_{\mu}(r)\frac{\partial^2U_{\mu}(r)}{\partial\mu\partial r}\right)\right]_0^{l_r}$$

Mais comme l'expression du produit cartésien conduit à une forme connue d'intégrale indéfinie de fonction de Bessel, il vient :

$$\left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2 = \int_0^{l_r} dr\, r^{n-1}\left(\Phi_{n,l}(r)\right) = \int_0^{l_r} dr\, r\left(J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)\right)^2$$

$$Or \quad \int dr\, r\left(J_\lambda(qr)\right)^2 = \frac{r^2}{2}\left(\left(J_\lambda(qr)\right)^2 - J_{\lambda-1}(qr)J_{\lambda+1}(qr)\right) \quad et \quad J_{\lambda-1}(qr) + J_{\lambda+1}(qr) = \frac{2\lambda}{qr}J_\lambda(qr)$$

$$J_{\lambda-1}(qr) = \frac{\lambda}{qr}J_\lambda(qr) + \frac{J_\lambda'(qr)}{q} \quad J_{\lambda+1}(qr) = \frac{\lambda}{qr}J_\lambda(qr) - \frac{J_\lambda'(qr)}{q}$$

$$\Rightarrow J_{\lambda-1}(qr)J_{\lambda+1}(qr) = \frac{\lambda^2}{q^2r^2}\left(J_\lambda(qr)\right)^2 - \frac{\left(J_\lambda'(qr)\right)^2}{q^2} \Rightarrow \int dr\, r\left(J_\lambda(qr)\right)^2 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\left(J_\lambda'(qr)\right)^2}{q^2} + \left(1 - \frac{\lambda^2}{q^2r^2}\right)\left(J_\lambda(qr)\right)^2\right)$$

$$\left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2 = \int_0^{l_r} dz\, z\left(J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)\right)^2 = \left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}'\left(\mu_{n,l} r\right)^2}{\left(\mu_{n,l}\right)^2} + J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)^2\left(1 - \frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{r^2\left(\mu_{n,l}\right)^2}\right)\right)\right]_0^{l_r}$$

On retrouve ce même résultat en revenant à la manipulation initiale, soit :

$$\int_0^{l_r} dr\, r^{n-1}\left(U_\mu(r)\right)^2 = \frac{1}{2\mu}\left[r^{n-1}\left(\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r}\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial \mu} - U_\mu(r)\frac{\partial^2 U_\mu(r)}{\partial \mu \partial r}\right)\right]_0^{l_r}$$

$$Or\ \lambda = \frac{n-2}{2} \Rightarrow n-1 = 2\lambda + 1 \qquad U_\mu(r) = r^{-\lambda}J_\lambda(\mu r) \Rightarrow J_\lambda(\mu r) = r^\lambda U_\mu(r)$$

$$Puisque \quad \mu\frac{\partial J_\lambda(\mu r)}{\partial \mu} = r\frac{\partial J_\lambda(\mu r)}{\partial r} \Rightarrow \mu r^\lambda\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial \mu} = r\frac{\partial r^\lambda U_\mu(r)}{\partial r} = r\left\{\lambda r^{\lambda-1}U_\mu(r) + r^\lambda\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r}\right\}$$

$$\Rightarrow \mu r^\lambda\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial \mu} = r^\lambda\left\{\lambda U_\mu(r) + r\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r}\right\} \Rightarrow \mu\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial \mu} = \lambda U_\mu(r) + r\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \mu\frac{\partial^2 U_\mu(r)}{\partial r\partial \mu} = \frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} + r\frac{\partial^2 U_\mu(r)}{\partial r^2} + \lambda\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} \quad Or \quad \frac{\partial^2 U_\mu(r)}{\partial r^2} = -\left(\frac{2\lambda+1}{r}\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} + \mu^2 U(r)\right)$$

$$\Rightarrow \mu\frac{\partial^2 U_\mu(r)}{\partial r\partial \mu} = \frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} + \lambda\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} - r\left(\frac{2\lambda+1}{r}\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} + \mu^2 U(r)\right) = -\left(\lambda\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} + r\mu^2 U(r)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r}\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial \mu} - U_\mu(r)\frac{\partial^2 U_\mu(r)}{\partial \mu\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r}\left(r\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} + \lambda U_\mu(r)\right) + \frac{1}{\mu}U_\mu(r)\left(\lambda\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} + r\mu^2 U(r)\right)$$

$$\Rightarrow r^{2\lambda+1}\left\{\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r}\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial \mu} - U_\mu(r)\frac{\partial^2 U_\mu(r)}{\partial \mu\partial r}\right\} = r^{2\lambda+1}\left\{\frac{r}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r}\right)^2 + \frac{2\lambda}{\mu}U_\mu(r)\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} + r\mu\left(U_\mu(r)\right)^2\right\}$$

$$U_\mu(r) = r^{-\lambda}J_\lambda(\mu r) \Rightarrow \frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r} = r^{-\lambda}\left(\frac{\partial J_\lambda(\mu r)}{\partial r} - \frac{\lambda}{r}J_\lambda(\mu r)\right)$$

$$\Rightarrow r^{2\lambda+1}\left\{\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial r}\frac{\partial U_\mu(r)}{\partial \mu} - U_\mu(r)\frac{\partial^2 U_\mu(r)}{\partial \mu\partial r}\right\} = r^2\mu\left\{\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial J_\lambda(\mu r)}{\partial r}\right)^2 + \left(J_\lambda(\mu r)\right)^2\left\{1 - \frac{\lambda^2}{r^2\mu^2}\right\}\right\}$$

$$\Rightarrow \int_0^{l_r} dr\, r^{n-1}\left(U_\mu(r)\right)^2 = \frac{1}{2}\left[r^2\left\{\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial J_\lambda(\mu r)}{\partial r}\right)^2 + \left(J_\lambda(\mu r)\right)^2\left\{1 - \frac{\lambda^2}{r^2\mu^2}\right\}\right\}\right]_0^{l_r} \quad \lambda = \frac{n-2}{2}$$

Dans le cas qui nous occupe avec des conditions aux limites homogènes de Dirichlet, il vient :

$$J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=0 \Rightarrow J_{\frac{n-2}{2}}'\left(\mu_{n,l}l_r\right)=\mu_{n,l}J_{\frac{n-4}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right) \quad ou\ bien \quad J_{\frac{n-2}{2}}'\left(\mu_{n,l}l_r\right)=-\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)$$

$$\left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2=\left[\frac{r^2}{2}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}'\left(\mu_{n,l}r\right)^2}{\left(\mu_{n,l}\right)^2}\right]_0^{l_r}=\frac{l_r^{\,2}}{2}J_{\frac{n-4}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2 \quad ou\ bien \quad \left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2=\frac{l_r^{\,2}}{2}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2$$

Le développement en série de la solution est donc :

$$Produit\ cartésien \quad \left\langle f(r),g(r)\right\rangle=\int_0^{l_r}dr\ r^{n-1}f(r)g(r) \quad g(r)=r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)$$

$$\mu\rightarrow\mu_{n,l} \quad tq \quad J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=0 \quad A_l=\int_0^{l_r}dr\ r^{n-1}f(r)r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)=\int_0^{l_r}dr\ r^{\frac{n}{2}}f(r)J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)$$

$$\Rightarrow f(r)=\frac{2}{l_r^{\,2}}r^{\frac{2-n}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}A_l\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2} \quad et \quad T_u(r,t)=\frac{2}{l_r^{\,2}}r^{\frac{2-n}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}A_l\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2}$$

La seconde solution utilise les résultats du théorème de Duhamel :

<u>*Application du théorème de Duhamel à la solution*</u>

La solution du problème $T_w(r,t)$ $\begin{cases} C.L. & T_w(0,t) \quad fini \\ C.L. & T_w(l_r,t)=\varphi_2(t) \\ C.I. & T_w(r,0)=0 \end{cases}$ *est dérivée du problème à température fixée aux limites du domaine :* $T_w(r,\lambda,t)=\varphi_2(\lambda)T_{w2}(r,t)$ $\begin{cases} C.L. & T_{w2}(0,t) \quad fini \\ C.L. & T_{w2}(l_r,t)=1 \\ C.I. & T_{w2}(r,0)=0 \end{cases}$ *. Avec la solution pour* T_{w2} *:*

$$\begin{cases} C.L. & T_{w2}(0,t) \quad fini \\ C.L. & T_{w2}(l_r,t)=1 \\ C.I. & T_{w2}(r,0)=0 \end{cases} \Rightarrow T_{w2}(r,t)=1+T_t(r,t) \quad T_t(r,t)\begin{cases} C.L. & T_t(0,t) \quad fini \\ C.L. & T_t(l_r,t)=0 \\ C.I. & T_t(r,0)=-1 \end{cases}$$

$$\mu_{n,l}\rightarrow J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=0 \quad \int_0^{l_r}dr\ r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)=\frac{1}{\mu_{n,l}^{\frac{n}{2}+1}}\int_0^{l_r\mu_{n,l}}dz\ z^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(z) \quad T_t(r,0)=-1$$

$$Comme \quad \int dz\,z^{\nu+1}J_\nu(z)=\left[z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z)\right]\Rightarrow \int_0^{\mu_{n,l}l_r}dz\ z\,J_{\frac{n-2}{2}}(z)=l_r^{\frac{n}{2}}\mu_{n,l}^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\Rightarrow\int_0^{l_r}dr\ r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)=\frac{l_r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}{\mu_{n,l}}$$

$$Soit \quad 1=2l_r^{\frac{n}{2}-2}r^{\frac{2-n}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}\Rightarrow T_t(r,t)=-2l_r^{\frac{n}{2}-2}r^{\frac{2-n}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}$$

$$\Rightarrow T_{w2}(r,t)=1-2l_r^{\frac{n}{2}-2}r^{\frac{2-n}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}$$

.

Ce qui donne pour la solution du problème initial de Duhamel :

$$\mu_{n,l} \to J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right) = 0 \quad T_w(r,\lambda,t) = \varphi_2(\lambda)\left(1 - 2 l_r^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 t} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}\right)$$

$$\Rightarrow T_w(r,\lambda,t-\lambda) = \varphi_2(\lambda)\left(1 - 2 l_r^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 (t-\lambda)} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}\right)$$

Avec les intégrales indéfinies des fonctions de Bessel :

(1) $\int dz\, z J_\nu(z) = \left[z J_{\nu+1}(z)\right] + \nu \int dz\, J_\nu(z) \quad \int dz\, z^{\nu+1} J_\nu(z) = \left[z^{\nu+1} J_{\nu+1}(z)\right]$

(2) $\int dz\, z J_{\nu+1}(z) = -\left[z J_\nu(z)\right] + (\nu+1)\int dz\, J_\nu(z) \Leftrightarrow \int dz\, z J_\nu(z) = -\left[z J_{\nu-1}(z)\right] + \nu \int dz\, J_{\nu-1}(z)$

(3) $\int_0^x dz\, J_\nu(z) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} J_{\nu+2k+1}(x)$

$$(1) \Rightarrow \int_0^{\mu_{n,l} l_r} dz\, z\, J_{\frac{n-2}{2}}(z) = \mu_{n,l} l_r J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l} l_r) + \frac{n-2}{2}\int_0^{\mu_{n,l} l_r} dz\, J_{\frac{n-2}{2}}(z) \quad (3) \Rightarrow \int_0^{\mu_{n,l} l_r} dz\, J_{\frac{n-2}{2}}(z) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} J_{\frac{n}{2}+2k}(\mu_{n,l} l_r)$$

$$(1)\ et\ (3) \Rightarrow A_{n,l} = \mu_{n,l} l_r J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l} l_r) + (n-2)\sum_{k=0}^{+\infty} J_{\frac{n}{2}+2k}(\mu_{n,l} l_r)$$

Et par application du théorème de Duhamel :

$$Posons \quad F_2(r,t-\lambda) = \left(1 - 2 l_r^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 (t-\lambda)} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_2(r,t-\lambda) = 2\delta\, l_r^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \mu_{n,l}^2 e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 (t-\lambda)} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)} = 2\delta\, l_r^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 (t-\lambda)} \frac{\mu_{n,l} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}$$

$$T_w(r,t) = \int_0^t d\lambda \varphi_2(\lambda) \frac{\partial}{\partial t} F_2(r,t-\lambda) \Rightarrow T_w(r,t) = 2\delta\, l_r^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 t} \frac{\mu_{n,l} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)} \left(\int_0^t d\lambda\, \varphi_2(\lambda) e^{\delta\, \mu_{n,l}^2 \lambda}\right)$$

.

Ce qui donne la solution complète du problème à n dimensions :

$$T(r,t) = r^{\frac{2-n}{2}} \left\{ \frac{2}{l_r^2} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 t} A_l \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)^2} + \frac{2}{l_r^2} \delta\, l_r^{\frac{n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 t} \mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right) \left(\int_0^t d\lambda\, \varphi_2(\lambda) e^{\delta\, \mu_{n,l}^2 \lambda}\right) \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)^2} \right\}$$

$$T(r,t) = \frac{2 r^{\frac{2-n}{2}}}{l_r^2} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 t} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l} l_r)^2} \left(A_l + \delta\, l_r^{\frac{n}{2}} \mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right) \left(\int_0^t d\lambda\, \varphi_2(\lambda) e^{\delta\, \mu_{n,l}^2 \lambda}\right)\right)$$

$$avec \quad \mu_{n,l} \to J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r) = 0 \quad A_l = \int_0^{l_r} dr\, r^{\frac{n}{2}} f(r) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)$$

Exemple : température initiale nulle, Température de surface = Ts :

$$T(r,t)=T_s\frac{2\delta\, r^{\frac{2-n}{2}}\, l_r^{\frac{n}{2}}}{l_r^{\,2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\,\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)^2}\,\frac{\mu_{n,l}}{\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}}\,J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)\left(e^{\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}-1\right)$$

$$T(r,t)=T_s\frac{2r^{\frac{2-n}{2}}\, l_r^{\frac{n}{2}}}{l_r^{\,2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}\left(1-e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\right)\quad Comme\quad 2l_r^{\frac{n}{2}-2}r^{\frac{2-n}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}=1$$

$$\Rightarrow T(r,t)=T_s\left\{1-\frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\right\}\quad avec\quad \mu_{n,l}\rightarrow J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=0$$

Vérification avec n=3 , on retrouve une formule identique :

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=Sin(x)\sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\Rightarrow J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)=J_{\frac{1}{2}}(\mu_l r)=\sqrt{\frac{2}{\pi\,\mu_l r}}Sin(\mu_l r)$$

$$avec\quad n=3\quad \mu_{n,l}\rightarrow Sin(\mu_{n,l}l_r)=0\Rightarrow \mu_l=\frac{l\pi}{l_r}$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\{Sin(x)-xCos(x)\}\sqrt{\frac{2}{\pi\, x^3}}\Rightarrow x^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)=\{Sin(x)-xCos(x)\}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Rightarrow (l\pi)^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(l\pi)=(-1)^{l-1}l\sqrt{2\pi}$$

$$Puisque\quad T(r,t)=T_s\left\{1-\frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\right\}\Rightarrow T(r,t)=T_s\left\{1+\frac{2}{\pi}\frac{l_r}{r}\sum_{l=1}^{+\infty}(-1)^l\,\frac{Sin(\mu_l r)}{l}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\right\}$$

A noter la valeur de la première intégrale :

$$\int dz\, z^{\nu+1}J_\nu(z)=\left[z^{\nu+1}J_{\nu+1}(z)\right]\Rightarrow\int_0^{\alpha}dz\, z^{\nu+1}J_\nu(z)=\alpha^{\nu+1}J_{\nu+1}(\alpha)$$

$$\Rightarrow I_0=\int_0^{l_r}dr\, r^{\frac{n}{2}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)=\frac{l_r^{\frac{n}{2}+1}}{\alpha^{\frac{n}{2}+1}}\int_0^{\alpha}dz\, z^{\frac{n}{2}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(z)=\frac{l_r^{\nu+2}}{\alpha^{\nu+2}}\int_0^{\alpha}dz\, z^{\nu+1}\,J_\nu(z)=l_r^{\nu+2}\,\frac{J_{\nu+1}(\alpha)}{\alpha}$$

Exemple : température initiale nulle Température de surface = tTs :

$$\text{Comme}\quad \int_0^t d\lambda\ \lambda\ e^{\delta\ \mu_{n,l}{}^2\lambda} = \frac{1+\left(\delta\ \mu_{n,l}{}^2 t-1\right)e^{\delta\ \mu_{n,l}{}^2\lambda}}{\left(\delta\ \mu_{n,l}{}^2\right)^2} \Rightarrow e^{-\delta\ \mu_{n,l}{}^2 t}\int_0^t d\lambda\ \lambda\ e^{\delta\ \mu_{n,l}{}^2\lambda} = \frac{\delta\ \mu_{n,l}{}^2 t-1+e^{-\delta\ \mu_{n,l}{}^2 t}}{\left(\delta\ \mu_{n,l}{}^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{2\,l_r{}^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}}}{\delta} T_s \sum_{l=1}^{+\infty}\left(\delta\ \mu_{n,l}{}^2 t-1+e^{-\delta\ \mu_{n,l}{}^2 t}\right)\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{\mu_{n,l}{}^3 J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = tT_s \times \underbrace{2\,l_r{}^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}}_{=1} - \frac{2\,l_r{}^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}}}{\delta} T_s \sum_{l=1}^{+\infty}\left(1-e^{-\delta\ \mu_{n,l}{}^2 t}\right)\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{\mu_{n,l}{}^3 J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = tT_s - \frac{2\,l_r{}^{\frac{n}{2}-2} r^{\frac{2-n}{2}}}{\delta} T_s \sum_{l=1}^{+\infty}\left(1-e^{-\delta\ \mu_{n,l}{}^2 t}\right)\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{\mu_{n,l}{}^3 J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}$$

$$\text{avec}\quad \mu_{n,l} \to J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right) = 0$$

Pour simplifier l'expression et trouver l'expression du terme non temporel, il va falloir calculer l' intégrale de Bessel suivante :

$$\text{Calculons}\quad I_2 = \int_0^{l_r} dr\ r^{\frac{n}{2}}\left(r^2 - l_r{}^2\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) \quad \text{Posons } \alpha = \mu_{n,l} l_r \quad z = \mu_{n,l} r \quad \text{et} \quad J_\nu(\alpha) = 0$$

$$\mu_{n,l}{}^{\frac{n}{2}+3} = \frac{\alpha^{\frac{n}{2}+3}}{l_r{}^{\frac{n}{2}+3}} = \frac{\alpha^{\nu+4}}{l_r{}^{\nu+4}} \quad \Rightarrow I_2 = \frac{l_r{}^{\nu+4}}{\alpha^{\nu+4}}\int_0^\alpha dz\ z^{\nu+1}\left(z^2-\alpha^2\right) J_\nu(z) \qquad \text{Ici } \nu = \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$$

$$\int dz\ z^\lambda J_\nu(z) = \left[z^\lambda J_{\nu+1}(z)\right] + (\nu+1-\lambda)\int dz\ z^{\lambda-1} J_{\nu+1}(z)$$

$$\int dz\ z^\lambda J_\nu(z) = \left[z^\lambda J_{\nu+1}(z) + (\lambda-\nu-1) z^{\lambda-1} J_\nu(z)\right] + \left(\nu^2 - (\lambda-1)^2\right)\int dz\ z^{\lambda-2} J_\nu(z)$$

$$\text{Posons } \lambda = \nu+3 \Rightarrow \int dz\ z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left[z^{\nu+3} J_{\nu+1}(z) + 2z^{\nu+2} J_\nu(z)\right] - 4(\nu+1)\int dz\ z^{\nu+1} J_\nu(z)$$

$$\Rightarrow \int dz\ z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left[z^{\nu+1}\left(z^2 - 4(\nu+1)\right) J_{\nu+1}(z) + 2z^{\nu+2} J_\nu(z)\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha dz\ z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left[\alpha^{\nu+3} J_{\nu+1}(\alpha) + 2\alpha^{\nu+2} J_\nu(\alpha) - \alpha^{\nu+1} 4(\nu+1) J_{\nu+1}(\alpha)\right] \Leftarrow J_\nu(\alpha) = \frac{2(\nu+1)}{\alpha} J_{\nu+1}(\alpha) - J_{\nu+2}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \int_0^\alpha dz\ z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left[\alpha^{\nu+3} J_{\nu+1}(\alpha) - 2\alpha^{\nu+2} J_{\nu+2}(\alpha)\right] \Rightarrow \int_0^\alpha dz\ z^{\nu+1}\left(z^2-\alpha^2\right) J_\nu(z) = \left[-4(\nu+1)\alpha^{\nu+1} J_{\nu+1}(\alpha) + 2\alpha^{\nu+2} J_\nu(\alpha)\right]$$

$$\frac{1}{\alpha^{\nu+4}}\int_0^\alpha dz\ z^{\nu+1}\left(z^2-\alpha^2\right) J_\nu(z) = \frac{1}{\alpha^3}\left[-4(\nu+1) J_{\nu+1}(\alpha) + 2\alpha\ J_\nu(\alpha)\right] \Rightarrow \frac{1}{\alpha^{\nu+4}}\int_0^\alpha dz\ z^{\nu+1}\left(z^2-\alpha^2\right) J_\nu(z) = \frac{-4(\nu+1) J_{\nu+1}(\alpha)}{\alpha^3}$$

$$I_2 = -4(\nu+1) l_r{}^{\nu+4}\frac{J_{\nu+1}(\alpha)}{\alpha^3} = -2n l_r{}^{\frac{n}{2}}\frac{J_{\nu+1}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}{\mu_{n,l}{}^3} \Rightarrow f(r) = r^2 - l_r{}^2 = \frac{2}{l_r{}^2} r^{\frac{2-n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} I_2 \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)^2}$$

$$\Rightarrow f(r) = r^2 - l_r{}^2 = -\frac{4n}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{\mu_{n,l}{}^3 J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)}$$

.

L'expression de la solution s'en trouve légèrement simplifiée :

$$T(r,t)=tT_s-\frac{T_s}{2n\delta}\underbrace{\frac{4\mathrm{n}}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,3}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}}_{r^2-l_r^{\,2}}+\frac{2\,l_r^{\frac{n}{2}-2}r^{\frac{2-n}{2}}}{\delta}T_s\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,3}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}$$

$$\Rightarrow T(r,t)=tT_s+\frac{T_s}{2n\delta}\left(r^2-l_r^{\,2}\right)+\frac{2\,l_r^{\frac{n}{2}-2}r^{\frac{2-n}{2}}}{\delta}T_s\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,3}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}$$

Pour le cas n=3, c'est le résultat déjà trouvé :

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=Sin(x)\sqrt{\frac{2}{\pi\,x}}\Rightarrow J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)=J_{\frac{1}{2}}(\mu_l r)=\sqrt{\frac{2}{\pi\,\mu_l r}}Sin(\mu_l r)\quad avec\quad n=3\quad \mu_{n,l}\to Sin(\mu_{n,l}l_r)=0\Rightarrow\mu_l=\frac{l\pi}{l_r}$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x)=\{Sin(x)-xCos(x)\}\sqrt{\frac{2}{\pi\,x^3}}\Rightarrow x^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)=\{Sin(x)-xCos(x)\}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Rightarrow(l\pi)^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(l\pi)=(-1)^{l-1}l\sqrt{2\pi}$$

$$Puisque\quad T(r,t)=tT_s+\frac{T_s}{2n\delta}\left(r^2-l_r^{\,2}\right)+\frac{2\,l_r^{\frac{n}{2}-2}r^{\frac{2-n}{2}}}{\delta}T_s\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,3}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}$$

$$\Rightarrow T(r,t)=tT_s+\frac{T_s}{6\delta}\left(r^2-l_r^{\,2}\right)-\frac{2\,l_r^{\,3}}{\delta\pi^3}\frac{1}{r}T_s\sum_{l=1}^{+\infty}(-1)e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{Sin\left(\frac{l\pi}{l_r}r\right)}{l^3}$$

Exemple : valeur initiale fixe, valeur nulle en surface $f(r)=T_0\quad\varphi_2(t)=0$ *, solution que l'on a en quelque sorte déjà calculée et qui redonne l'expression trouvée pour n=3 :*

$$\mu_{n,l}\to J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=0\quad A_l=T_0\int_0^{l_r}dr\,r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)=\frac{l_r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}{\mu_{n,l}}$$

$$T(r,t)=\frac{2r^{\frac{2-n}{2}}}{l_r^{\,2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}A_l\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)^2}\Rightarrow T_t(r,t)=\frac{2T_0}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}$$

$$Cas\ n=3\quad T(r,t)=-T_0\frac{2}{\pi}\frac{l_r}{r}\sum_{l=1}^{+\infty}(-1)^l\frac{Sin(\mu_l r)}{l}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}$$

Exemple : valeur initiale quadratique, valeur nulle en surface $f(r)=T_0\left(l_r^{\,2}-r^2\right)/l_r^{\,2} \quad \varphi_2(t)=0$ *:*

$$\mu_{n,l}\to J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=0 \quad A_l=\frac{T_0}{l_r^{\,2}}\int_0^{l_r}dr\; r^{\frac{n}{2}}\left(l_r^{\,2}-r^2\right)J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)=2nl_r^{\frac{n}{2}}\frac{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}{\mu_{n,l}^{\,3}}$$

$$T(r,t)=\frac{2r^{\frac{2-n}{2}}}{l_r^{\,2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}A_l\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2}\Rightarrow T(r,t)=\frac{4nT_0}{l_r^{\,3}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{\mu_{n,l}^{\,3}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}$$

$$n=3\Rightarrow J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)=J_{\frac{1}{2}}\left(\mu_l r\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi\,\mu_l r}}Sin\left(\mu_l r\right)\quad avec\quad n=3\quad \mu_{n,l}\to Sin\left(\mu_{n,l}l_r\right)=0\Rightarrow \mu_l=\frac{l\pi}{l_r}$$

$$x^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(x)=\left\{Sin(x)-xCos(x)\right\}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Rightarrow (l\pi)^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(l\pi)=(-1)^{l-1}l\sqrt{2\pi}$$

$$T(r,t)=\frac{12T_0}{\pi^3}\frac{l_r}{r}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_n^{\,2}t}\frac{(-1)^{l-1}}{l^3}Sin\left(\frac{l\pi}{l_r}r\right)\quad avec\quad \mu_n=\frac{l\pi}{l_r}$$

Exemple : valeur initiale linéaire, valeur nulle en surface $f(r)=T_0\left(l_r-r\right)/l_r \quad \varphi_2(t)=0$ *:*

$$\mu_{n,l}\to J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=0 \quad A_l=\frac{T_0}{l_r}\int_0^{l_r}dr\; r^{\frac{n}{2}}\left(l_r-r\right)J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)\quad \nu=\frac{n-2}{2}=\frac{n}{2}-1\quad \alpha=\mu_{n,l}l_r\quad z=\mu_{n,l}r$$

$$\Rightarrow T(r,t)=\frac{2r^{\frac{2-n}{2}}}{l_r^{\,2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}A_l\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2}\quad et\quad A_l=\frac{T_0}{l_r}\frac{l_r^{\,\nu+3}}{\alpha^{\nu+3}}\left(\int_0^{\alpha}dz\left(\alpha\, z^{\nu+1}-z^{\nu+2}\right)J_\nu(z)\right)$$

En calculant des intégrales suivantes :

$$J_\nu(z)+J_{\nu+2}(z)=\frac{2(\nu+1)}{z}J_{\nu+1}(z)\Rightarrow J_\nu(z)=\frac{2(\nu+1)}{z}J_{\nu+1}(z)-J_{\nu+2}(z)\Rightarrow J_{\nu+2}(\alpha)=\frac{2(\nu+1)}{\alpha}J_{\nu+1}(\alpha)$$

$$\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+2}\,J_\nu(z)=\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+2}\left(\frac{2(\nu+1)}{z}J_{\nu+1}(z)-J_{\nu+2}(z)\right)=2(\nu+1)\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+1}\,J_{\nu+1}(z)-\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+2}\,J_{\nu+2}(z)$$

$$\int_0^\alpha dz\, z^{\nu}\,J_\nu(z)=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\alpha\{J_\nu(\alpha)\mathbf{H}_{\nu-1}(\alpha)-J_{\nu-1}(\alpha)\mathbf{H}_\nu(\alpha)\}=-2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\alpha J_{\nu-1}(\alpha)\mathbf{H}_\nu(\alpha)$$

$$\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+1}\,J_{\nu+1}(z)=2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\alpha\{J_{\nu+1}(\alpha)\mathbf{H}_\nu(\alpha)-J_\nu(\alpha)\mathbf{H}_{\nu+1}(\alpha)\}=2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\alpha J_{\nu+1}(\alpha)\mathbf{H}_\nu(\alpha)$$

$$\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+2}\,J_{\nu+2}(z)=2^{\nu+1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\alpha\{J_{\nu+2}(\alpha)\mathbf{H}_{\nu+1}(\alpha)-J_{\nu+1}(\alpha)\mathbf{H}_{\nu+2}(\alpha)\}$$

$$=2^{\nu+1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\alpha J_{\nu+1}(\alpha)\left\{\frac{2(\nu+1)}{\alpha}\mathbf{H}_{\nu+1}(\alpha)-\mathbf{H}_{\nu+2}(\alpha)\right\}$$

$$\Rightarrow\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+2}\,J_\nu(z)=2(\nu+1)2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\alpha J_{\nu+1}(\alpha)\mathbf{H}_\nu(\alpha)-2^{\nu+1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\alpha J_{\nu+1}(\alpha)\left\{\frac{2(\nu+1)}{\alpha}\mathbf{H}_{\nu+1}(\alpha)-\mathbf{H}_{\nu+2}(\alpha)\right\}$$

$$=2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\alpha J_{\nu+1}(\alpha)\left\{2(\nu+1)\mathbf{H}_\nu(\alpha)-2\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\left\{\frac{2(\nu+1)}{\alpha}\mathbf{H}_{\nu+1}(\alpha)-\mathbf{H}_{\nu+2}(\alpha)\right\}\right\}$$

$$=2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)J_{\nu+1}(\alpha)\{2(\nu+1)\alpha\,\mathbf{H}_\nu(\alpha)-(2\nu+3)(2(\nu+1)\mathbf{H}_{\nu+1}(\alpha)-\alpha\,\mathbf{H}_{\nu+2}(\alpha))\}$$

Récurrence $\quad \mathbf{H}_\nu(\alpha)=\dfrac{2(\nu+1)\mathbf{H}_{\nu+1}(\alpha)}{\alpha}-\mathbf{H}_{\nu+2}(\alpha)+\dfrac{2^{-\nu-1}\alpha^{\nu+1}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}\right)}$

$$\Rightarrow 2(\nu+1)\mathbf{H}_{\nu+1}(\alpha)-\alpha\mathbf{H}_{\nu+2}(\alpha)=\alpha\mathbf{H}_\nu(\alpha)-\frac{2^{-\nu-1}\alpha^{\nu+2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{5}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+2}\,J_\nu(z)=2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)J_{\nu+1}(\alpha)\left\{2(\nu+1)\alpha\,\mathbf{H}_\nu(\alpha)-(2\nu+3)\left(\alpha\,\mathbf{H}_\nu(\alpha)-\frac{2^{-\nu}\alpha^{\nu+2}}{(2\nu+3)\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\right)\right\}$$

$$\Rightarrow\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+2}\,J_\nu(z)=2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)J_{\nu+1}(\alpha)\left\{-\alpha\,\mathbf{H}_\nu(\alpha)+\frac{2^{-\nu}\alpha^{\nu+2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle\int_0^\alpha dz\, z^{\nu+2}\,J_\nu(z)=-2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)J_{\nu+1}(\alpha)\alpha\,\mathbf{H}_\nu(\alpha)+\alpha^{\nu+2}J_{\nu+1}(\alpha)\\ \displaystyle\int_0^\alpha dz\,\alpha\, z^{\nu+1}\,J_\nu(z)=\alpha^{\nu+2}J_{\nu+1}(\alpha)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int_0^\alpha dz\left(\alpha\, z^{\nu+1}-z^{\nu+2}\right)J_\nu(z)=2^{\nu}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)J_{\nu+1}(\alpha)\alpha\,\mathbf{H}_\nu(\alpha)$$

On arrive à l'expression de la solution :

$$A_l = \frac{T_0}{l_r}\frac{l_r^{\nu+3}}{\alpha^{\nu+3}}\left(\int_0^{\alpha} dz\left(\alpha\, z^{\nu+1} - z^{\nu+2}\right)J_\nu(z)\right) \qquad \int_0^{\alpha} dz\left(\alpha\, z^{\nu+1} - z^{\nu+2}\right)J_\nu(z) = 2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\alpha\, J_{\nu+1}(\alpha)\mathbf{H}_\nu(\alpha)$$

$$\Rightarrow A_l = T_0\frac{l_r^{\nu+2}}{\alpha^{\nu+2}}2^\nu\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)J_{\nu+1}(\alpha)\mathbf{H}_\nu(\alpha) = T_0 2^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)\mathbf{H}_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}{\mu_{n,l}^{\frac{n+2}{2}}}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{T_0\sqrt{\pi}\,2^{\frac{n}{2}}r^{\frac{2-n}{2}}}{l_r^{\,2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^2 t}\frac{\mathbf{H}_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\frac{n+2}{2}}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}$$

On retrouve l'expression déjà calculée dans le cas de la sphère à 3 dimensions :

$$Cas \quad n=3 \Rightarrow J_{\frac{1}{2}}(x) = Sin(x)\sqrt{\frac{2}{\pi\, x}} \quad \mathbf{H}_{\frac{n-2}{2}}(x) = \mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\, x}}\left(1-Cos(x)\right) \quad \mu_{n,l} = \mu_l = \frac{l\pi}{l_r} \quad \mu_l l_r = l\pi$$

$$(l\pi)^{\frac{3}{2}}J_{\frac{3}{2}}(l\pi) = (-1)^{l-1}l\sqrt{2\pi} \Rightarrow J_{\frac{3}{2}}((2l+1)\pi) = \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{2l+1}}$$

$$\mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(l\pi) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2}{l}}\left(1-(-1)^l\right) \Rightarrow \mathbf{H}_{\frac{1}{2}}(2l\pi) = 0 \quad \mathbf{H}_{\frac{1}{2}}((2l+1)\pi) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{(2l+1)}}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{T_0\sqrt{\pi}\,2^{\frac{3}{2}}}{l_r^{\,2}\sqrt{r}}\Gamma(2)\sum_{l=0}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{2l+1}^2 t}\sqrt{\frac{2}{\pi\frac{(2l+1)\pi}{l_r}r}}\frac{\mathbf{H}_{\frac{1}{2}}((2l+1)\pi)Sin\left(\frac{(2l+1)\pi}{l_r}r\right)}{\left(\frac{(2l+1)\pi}{l_r}\right)^{\frac{5}{2}}J_{\frac{3}{2}}((2l+1)\pi)}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{8T_0}{\pi^3}\frac{l_r}{r}\sum_{l=0}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{2l+1}^2 t}\frac{Sin\left(\frac{(2l+1)\pi}{l_r}r\right)}{(2l+1)^3} \Rightarrow T(r,t) = \frac{8T_0}{\pi^3}\frac{l_r}{r}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{e^{-\delta\,\mu_{2l+1}^2 t}}{(2l+1)^3}Sin\left(\frac{(2l+1)\pi}{l_r}r\right)$$

Exemple : valeur initiale de Bessel , valeur nulle en surface : $f(r) = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{m,l}r) \quad \varphi_2(t) = 0$

:

$$f(r) = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{m,l}r) \qquad \mu_{n,l} \quad tq \quad J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r) = 0$$

$$A_l = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\int_0^{l_r}dr\, rJ_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{m,l}r)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r) = \partial_{m,n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\frac{l_r^{\,2}}{2}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)^2 \Rightarrow T(r,t) = \left(\frac{\pi}{2r}\right)^{\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{m,l}r)e^{-\delta\,\mu_{m,l}^2 t}$$

Problème de diffusion sur une hypersphère: condition initiale et conditions aux limites de Neumann

La solution est construite à partir des mêmes fonctions propres, limités aux fonctions de premier espèce pour respecter la condition de finitude en z=0 :

$$\Delta T(r,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}=0 \quad T(r,t)=U(r)W(t)\Rightarrow U''(r)+\frac{n-1}{r}U'(r)+\mu^2U(r)=0 \quad \frac{\partial W(t)}{\partial t}+\delta\,\mu^2W(t)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} C.L.\quad T(0,t)\quad fini \\ C.L.\quad \dfrac{\partial T(l_r,t)}{\partial r}=\varphi_2(t) \\ C.I.\quad T(r,0)=f(r)\end{array}\right\}\quad \left\{\begin{array}{l} U(r)\propto r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu r)\qquad W(t)\propto e^{-\delta\mu^2 t} \\ n=3\Rightarrow U(r)\propto\dfrac{J_{\frac{1}{2}}(\mu r)}{\sqrt{r}}\quad J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}Sin(x)\Rightarrow U(r)\propto\dfrac{Sin(\mu r)}{r}\end{array}\right.$$

On peut ramener la solution à l'addition des solutions des deux problèmes suivants :

$$T(r,t)=T_u(r,t)+T_w(r,t)\qquad \left\{\begin{array}{l} C.L.\quad T_u(0,t)\quad fini \\ C.L.\quad \dfrac{\partial T_u(l_r,t)}{\partial r}=0 \\ C.I.\quad T_u(r,0)=f(r)\end{array}\right.\quad \left\{\begin{array}{l} C.L.\quad T_w(0,t)\quad fini \\ C.L.\quad \dfrac{\partial T_w(l_r,t)}{\partial r}=\varphi_2(t) \\ C.I.\quad T_w(r,0)=0\end{array}\right.$$

La première solution est une solution homogène qui se développe à l'aide des fonctions propres, orthogonales entre-elles pour des valeurs propres différentes. Il vient par conséquent une solution développée en série de fonctions propres aux valeur propres données par une équation transcendantale :

$$\Phi_{n,0}(r)=1\quad \Phi_{n,l}(r)=r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)\qquad T_u(r,t)=B_{n,0}+\sum_{l=1}^{+\infty}B_{n,l}e^{-\delta\,\mu_{n,l}{}^2t}r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)$$

$$Relation\ de\ récurrence\quad J_{\frac{n-4}{2}}(x)+J_{\frac{n}{2}}(x)=\frac{n-2}{x}J_{\frac{n-2}{2}}(x)\quad Dérivation\quad \frac{dJ_{\frac{n-2}{2}}x}{dx}=J_{\frac{n-4}{2}}(x)-\frac{n-2}{2x}J_{\frac{n-2}{2}}(x)$$

$$\Phi_{n,l}'(r)=r^{\frac{2-n}{2}}\frac{dJ_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{dr}+\frac{2-n}{2}r^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)=\mu_{n,l}r^{\frac{2-n}{2}}\left(J_{\frac{n-4}{2}}(\mu_{n,l}r)-\frac{n-2}{2\mu_{n,l}r}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)\right)+\frac{2-n}{2}r^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)$$

$$\Rightarrow\Phi_{n,l}'(r)=\mu_{n,l}r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-4}{2}}(\mu_{n,l}r)+r^{-\frac{n}{2}}(2-n)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)\quad \Phi_{n,l}'(l_r)=0$$

$$\Rightarrow\mu_{n,l}l_r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-4}{2}}(\mu_{n,l}l_r)+l_r^{-\frac{n}{2}}(2-n)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=0$$

$$Relation\ de\ récurrence\quad \mu_{n,l}l_rJ_{\frac{n-4}{2}}(\mu_{n,l}l_r)+(2-n)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=-\mu_{n,l}l_rJ_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)$$

$$\Phi_{n,l}'(l_r)=0\Rightarrow\mu_{n,l}l_rJ_{\frac{n-4}{2}}(\mu_{n,l}l_r)+(2-n)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=0\Rightarrow\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mu_{n,l}=0\quad valeur\ propre\ nulle \\ J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=0\end{array}\right.$$

$$\langle\Phi_{n,l}(r),\Phi_{n,m}(r)\rangle=\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}\Phi_{n,l}(r)\Phi_{n,m}(r)=\int_0^{l_r}dr\,r\,J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,m}r)=0\quad si\ l\neq m\quad voir\ ci-après$$

$$\|\Phi_{n,l}(r)\|^2=\langle\Phi_{n,l}(r),\Phi_{n,m}(r)\rangle=\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}(\Phi_{n,l}(r))^2\quad Valeur\ propre\ nulle\ \|\Phi_{n,0}(r)\|^2=\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}=\frac{l_r^{\,n}}{n}$$

.

Le calcul de la norme des fonctions propres, de valeur propre non nulle, a déjà été obtenu par le calcul classique :

$$\left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2=\int_0^{l_r}dz\,z\left(J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)\right)^2=\left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}'\left(\mu_{n,l}r\right)^2}{\left(\mu_{n,l}\right)^2}+J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)^2\left(1-\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{r^2\left(\mu_{n,l}\right)^2}\right)\right)\right]_0^{l_r}$$

Dans le cas qui nous occupe avec des conditions aux limites homogènes de Neumann, il vient :

$$\left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2=\frac{l_r^{\,2}}{2}\left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}'\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2}{\left(\mu_{n,l}\right)^2}+J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2\left(1-\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{l_r^{\,2}\left(\mu_{n,l}\right)^2}\right)\right)$$

$$\Phi_{n,l}'\left(l_r\right)=0\Rightarrow\mu_{n,l}l_rJ_{\frac{n-4}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=\left(n-2\right)J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)$$

Autre relation de récurrence $\quad J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)+J_{\frac{n+2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=\dfrac{nJ_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}{\mu_{n,l}l_r}\Rightarrow J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=-J_{\frac{n+2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)$

$$\frac{J_{\frac{n-2}{2}}'\left(\mu_{n,l}l_r\right)}{\mu_{n,l}}=J_{\frac{n-4}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)-\frac{n-2}{2\mu_{n,l}l_r}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=\frac{n-2}{2\mu_{n,l}l_r}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)$$

$$\Rightarrow\left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2=\frac{l_r^{\,2}}{2}\left(\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{\mu_{n,l}l_r}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2+J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2\left(1-\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{l_r^{\,2}\left(\mu_{n,l}\right)^2}\right)\right)=\frac{l_r^{\,2}}{2}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2$$

Le développement en série de la solution est donc :

Produit cartésien $\quad\left\langle f(r),g(r)\right\rangle=\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}f(r)g(r)\quad g(r)=r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)$

$$\mu\to\mu_{n,l}\quad tq\quad J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=0\quad A_l=\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}f(r)\quad A_l=\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}f(r)r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)=\int_0^{l_r}dr\,r^{\frac{n}{2}}f(r)J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)$$

$$\Rightarrow f(r)=\frac{n}{l_r^{\,n}}A_0+\frac{2}{l_r^{\,2}}r^{\frac{2-n}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}A_l\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2}\quad et\quad T_u(r,t)=\frac{n}{l_r^{\,n}}A_0+\frac{2}{l_r^{\,2}}r^{\frac{2-n}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}A_l\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)}{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2}$$

Le cas d'une fonction initiale constante conduit à une solution triviale, en effet :

$$\mu\to\mu_{n,l}\quad tq\quad J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)=0\quad A_l=T_0\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}\quad A_l=T_0\int_0^{l_r}dr\,r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)\quad Posons\ \nu=\frac{n-2}{2}\quad\alpha=\mu_{n,l}l_r\quad z=\mu_{n,l}r$$

$$I_0=\int_0^{l_r}dr\,r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)=\frac{l_r^{\,\nu+2}}{\alpha^{\nu+2}}\int_0^{\alpha}dz\,z^{\nu+1}J_\nu(z)=l_r^{\,\nu+2}\frac{J_{\nu+1}(\alpha)}{\alpha}=0\Rightarrow\quad A_0=\frac{l_r^{\,n}}{n}\Rightarrow T_u(r,t)=T_0$$

.

Étudions le cas d'une fonction initiale radiale quadratique de la forme $r^2/2l_r$:

Calculons $A_l = \int_0^{l_r} dr\, r^{\frac{n}{2}} \left(\frac{r^2}{2l_r}\right) J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)$ *Posons* $\alpha = \mu_{n,l} l_r \quad z = \mu_{n,l} r \quad$ *et* $\quad J_{\nu+1}(\alpha) = 0$

$$\mu_{n,l}^{\frac{n}{2}+3} = \frac{\alpha^{\frac{n}{2}+3}}{l_r^{\frac{n}{2}+3}} = \frac{\alpha^{\nu+4}}{l_r^{\nu+4}} \quad \Rightarrow A_l = \frac{1}{2l_r}\frac{l_r^{\nu+4}}{\alpha^{\nu+4}}\int_0^{\alpha} dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) \qquad Ici\ \nu = \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$$

$$\int dz\, z^{\lambda} J_\nu(z) = \left[z^{\lambda} J_{\nu+1}(z)\right] + (\nu+1-\lambda)\int dz\, z^{\lambda-1} J_{\nu+1}(z)$$

$$\int dz\, z^{\lambda} J_\nu(z) = \left[z^{\lambda} J_{\nu+1}(z) + (\lambda-\nu-1) z^{\lambda-1} J_\nu(z)\right] + \left(\nu^2 - (\lambda-1)^2\right)\int dz\, z^{\lambda-2} J_\nu(z)$$

$$Posons\ \lambda = \nu+3 \Rightarrow \int dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left[z^{\nu+3} J_{\nu+1}(z) + 2z^{\nu+2} J_\nu(z)\right] - 4(\nu+1)\int dz\, z^{\nu+1} J_\nu(z)$$

$$\Rightarrow \int dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left[z^{\nu+1}\left(z^2 - 4(\nu+1)\right) J_{\nu+1}(z) + 2z^{\nu+2} J_\nu(z)\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha} dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left[\alpha^{\nu+3} J_{\nu+1}(\alpha) + 2\alpha^{\nu+2} J_\nu(\alpha) - \alpha^{\nu+1} 4(\nu+1) J_{\nu+1}(\alpha)\right] \Leftarrow J_\nu(\alpha) = \frac{2(\nu+1)}{\alpha} J_{\nu+1}(\alpha) - J_{\nu+2}(\alpha)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha} dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) = 2\alpha^{\nu+2} J_\nu(\alpha) = -2\alpha^{\nu+2} J_{\nu+2}(\alpha)$$

$$A_l = \frac{1}{2l_r}\frac{2l_r^{\nu+4}}{\alpha^2} J_\nu(\alpha) = \frac{l_r^{\frac{n}{2}}}{\mu_{n,l}^2} J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r) \quad A_0 = \frac{1}{2l_r}\int_0^{l_r} dr\, r^{n+1} = \frac{l_r^{n+1}}{2(n+2)}$$

$$f(r) = \frac{r^2}{2l_r} = \frac{l_r}{2}\frac{n}{n+2} + \frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{\mu_{n,l}^2 J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r)} \quad et \quad T_u(r,t) = \frac{n l_r}{2(n+2)} + \frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 t} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{\mu_{n,l}^2 J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r)}$$

.

On peut alors affirmer que la fonction suivante est solution du problème de diffusion normalisé:

$$T_u(r,t) = \frac{nt\delta}{l_r} + \frac{r^2}{2l_r} - \left\{\frac{n l_r}{2(n+2)} + \frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 t} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{\mu_{n,l}^2 J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r)}\right\}$$

$$\Delta T(r,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = 0 \quad \begin{cases} C.L. \quad T_u(0,t) \quad fini \\ C.L. \quad \dfrac{\partial T_u(l_r,t)}{\partial r} = 1 \\ C.I. \quad T_u(r,0) = 0 \end{cases}$$

Si la fonction initiale est de la forme $T0(1-r^2/lr^2)$, *la solution à flux nulle sur la surface est la suivante :*

$$f(r)=1-\frac{r^2}{l_r^{\,2}}=1-\frac{n}{n+2}-\frac{4}{l_r^{\,2}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,2}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}=\frac{2}{n+2}-\frac{4}{l_r^{\,2}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,2}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}$$

$$\Rightarrow T_u(r,t)=T_0\left(\frac{2}{n+2}-\frac{4}{l_r^{\,2}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,2}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}\right)$$

La seconde solution utilise les résultats du théorème de Duhamel :

<u>*Application du théorème de Duhamel à la solution*</u>

La solution du problème $T_w(r,t)$ $\begin{cases} C.L. & T_w(0,t) \quad fini \\ C.L. & \dfrac{\partial T_w(l_r,t)}{\partial r}=\varphi_2(t) \\ C.I. & T_w(r,0)=0 \end{cases}$ *est dérivée du problème à température fixée aux limites du domaine :* $T_w(r,\lambda,t)=\varphi_2(\lambda)T_{w2}(r,t)$ $\begin{cases} C.L. & T_{w2}(0,t) \quad fini \\ C.L. & \dfrac{\partial T_{w2}(l_r,t)}{\partial r}=1 \\ C.I. & T_{w2}(r,0)=0 \end{cases}$ *. Avec la solution pour* T_{w2} *définie d'après le calcul réalisé précédemment :*

$$T_{w2}(r,t)=\frac{nt\delta}{l_r}+l_r\left\{\frac{r^2}{2l_r^{\,2}}-\frac{n}{2(n+2)}-\frac{2}{l_r^{\,2}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,2}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}\right\}$$

Ce qui donne pour la solution du problème initial de Duhamel :

$$\mu_{n,l}\rightarrow J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=0 \quad T_w(r,\lambda,t)=\varphi_2(\lambda)\left(\frac{nt\delta}{l_r}+l_r\left\{\frac{r^2}{2l_r^{\,2}}-\frac{n}{2(n+2)}-\frac{2}{l_r^{\,2}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,2}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}\right\}\right)$$

$$\Rightarrow T_w(r,\lambda,t-\lambda)=\varphi_2(\lambda)\left(\frac{n(t-\lambda)\delta}{l_r}+l_r\left\{\frac{r^2}{2l_r^{\,2}}-\frac{n}{2(n+2)}-\frac{2}{l_r^{\,2}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}(t-\lambda)}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,2}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}\right\}\right)$$

Et par application du théorème de Duhamel :

$$Posons \quad F_2(r,t-\lambda)=\frac{n(t-\lambda)\delta}{l_r}+l_r\left\{\frac{r^2}{2l_r^{\,2}}-\frac{n}{2(n+2)}-\frac{2}{l_r^{\,2}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}(t-\lambda)}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,2}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}F_2(r,t-\lambda)=\frac{n\delta}{l_r}+l_r\frac{2\delta}{l_r^{\,2}}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\mu_{n,l}^{\,2}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}(t-\lambda)}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{\mu_{n,l}^{\,2}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}$$

$$\Rightarrow\frac{\partial}{\partial t}F_2(r,t-\lambda)=\frac{n\delta}{l_r}+\frac{2\delta}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}(t-\lambda)}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}$$

$$T_w(r,t)=\int_0^t d\lambda\varphi_2(\lambda)\frac{\partial}{\partial t}F_2(r,t-\lambda)$$

$$\Rightarrow T_w(r,t)=\frac{n\delta}{l_r}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)\right)+\frac{2\delta}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}\lambda}\right)$$

Ce qui donne la solution complète du problème à n dimensions :

$$\mu\to\mu_{n,l}\quad tq\quad J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=0\quad A_l=\int_0^{l_r}dr\,r^{n-1}f(r)\quad A_l=\int_0^{l_r}dr\,r^{\frac{n}{2}}f(r)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)$$

$$T(r,t)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{n}{l_r^{\,n}}A_0+\dfrac{2}{l_r^{\,2}}r^{\frac{2-n}{2}}\displaystyle\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}A_l\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)^2}\\[2ex] +\dfrac{n\delta}{l_r}\left(\displaystyle\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)\right)+\dfrac{2\delta}{l_r}\left(\dfrac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\displaystyle\sum_{l=1}^{+\infty}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}\lambda}\right)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow T(r,t)=\frac{n}{l_r^{\,n}}A_0+\frac{n\delta}{l_r}\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)\right)+\frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\left\{\frac{A_l}{l_r^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}+\delta\left(\int_0^t d\lambda\,\varphi_2(\lambda)e^{\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}\lambda}\right)\right\}e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)}$$

Revenons au cas où le flux est imposé constant F_0 et une température initiale nulle :

$$\mu \to \mu_{n,l} \quad tq \quad J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l} l_r) = 0 \quad \Rightarrow T(r,t) = F_0 \left\{ \frac{n\delta t}{l_r} + \frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \left(1 - e^{-t\delta \mu_{n,l}^2}\right) \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{\mu_{n,l}^2 J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r)} \right\}$$

$$Comme \quad \frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{\mu_{n,l}^2 J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r)} = l_r \left\{ \frac{r^2}{2l_r^2} - \frac{n}{2(n+2)} \right\}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = F_0 \left\{ \frac{n\delta t}{l_r} + l_r \left(\frac{r^2}{2l_r^2} - \frac{n}{2(n+2)} - \frac{2}{l_r^2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-t\delta \mu_{n,l}^2} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{\mu_{n,l}^2 J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r)} \right) \right\}$$

Solution déjà évoquée auparavant. Dans le cas où le flux est imposé constant F0 et la température initiale de la formeT0(1-r^2/lr^2) :

$$\mu \to \mu_{n,l} \quad tq \quad J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l} l_r) = 0$$

$$T(r,t) = \left\{ \begin{array}{l} T_0 \left(\frac{2}{n+2} - \frac{4}{l_r^2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta \mu_{n,l}^2 t} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{\mu_{n,l}^2 J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r)} \right) + \\ + F_0 \left\{ \frac{n\delta t}{l_r} + l_r \left(\frac{r^2}{2l_r^2} - \frac{n}{2(n+2)} - \frac{2}{l_r^2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-t\delta \mu_{n,l}^2} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{\mu_{n,l}^2 J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r)} \right) \right\} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow T(r,t) = \frac{2T_0}{n+2} + F_0 \left\{ \frac{n\delta t}{l_r} + l_r \left(\frac{r^2}{2l_r^2} - \frac{n}{2(n+2)} \right) \right\} - \frac{2}{l_r^2}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} (2T_0 + F_0) \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta \mu_{n,l}^2 t} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} r)}{\mu_{n,l}^2 J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l} l_r)}$$

Revenons au cas où le flux est imposé constant F0 et une température initiale nulle à trois dimensions, on obtient :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = Sin(x)\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \quad J_{\frac{3}{2}}(x) = \{Sin(x) - xCos(x)\}\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}$$

$$\mu \to \mu_l \quad tq \quad J_{\frac{3}{2}}(\mu_l l_r) = 0 \Rightarrow \frac{Sin(\mu_l l_r)}{Cos(\mu_l l_r)} = Tan(\mu_l l_r) = \mu_l l_r$$

$$\Rightarrow T(r,t) = F_0 \frac{3\delta t}{l_r} + F_0 \frac{5r^2 - 3l_r^2}{10 l_r} - \frac{2F_0}{r} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-t\delta \mu_l^2} \frac{Sin(\mu_l r)}{\mu_l^2 Sin(\mu_l l_r)}$$

Problème de diffusion radiale sur une hypersphère : condition initiale et condition aux limites de Robin homogène à la surface r=lr

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial r^2}+\left(\frac{n-1}{r}\right)\frac{\partial T(x,t)}{\partial r}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=0 \quad \textit{avec terme de diffusivité } \delta$$

$$r=\|\vec{x}\| \quad \|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2} \quad \vec{x}\in\Omega=\left\{\vec{x}/\|\vec{x}\|\le l_r\right\} \textit{ de frontière } \partial\Omega=\left\{\vec{x}/\|\vec{x}\|=l_r\right\}$$

$$C.L. \quad \alpha\frac{\partial T(\vec{x},t)}{\partial n}+\beta\, T(\vec{x},t)\Big|_{\partial\Omega}=0 \quad C.I \quad T(\vec{x},0)=T_0(\vec{x})$$

La solution se développe en série de fonctions propres aux valeur propres données par une équation transcendantale :

$$\Phi_{n,0}(r)=1 \quad \Phi_{n,l}(r)=r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r) \qquad T_u(r,t)=\sum_{l=1}^{+\infty}B_{n,l}e^{-\delta\,\mu_{n,l}{}^2 t}r^{\frac{2-n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)$$

$$\textit{Relation de récurrence} \quad J_{\frac{n-4}{2}}(x)+J_{\frac{n}{2}}(x)=\frac{n-2}{x}J_{\frac{n-2}{2}}(x) \quad \textit{Dérivation} \quad \frac{dJ_{\frac{n-2}{2}}x}{dx}=J_{\frac{n-4}{2}}(x)-\frac{n-2}{2x}J_{\frac{n-2}{2}}(x)$$

$$\Phi_{n,l}'(r)=r^{\frac{2-n}{2}}\frac{dJ_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)}{dr}+\frac{2-n}{2}r^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)=\mu_{n,l}r^{\frac{2-n}{2}}\left(J_{\frac{n-4}{2}}(\mu_{n,l}r)-\frac{n-2}{2\mu_{n,l}r}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)\right)+\frac{2-n}{2}r^{-\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)$$

$$\Rightarrow \Phi_{n,l}'(r)=r^{-\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}rJ_{\frac{n-4}{2}}(\mu_{n,l}r)+(2-n)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)\right)=-r^{\frac{2-n}{2}}\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}r)$$

$$\textit{Relation de récurrence} \quad \mu_{n,l}rJ_{\frac{n-4}{2}}(\mu_{n,l}r)+(2-n)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)=-\mu_{n,l}rJ_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}r)$$

$$\Rightarrow \beta\,\Phi_{n,l}(r)+\alpha\Phi_{n,l}'(r)=r^{\frac{2-n}{2}}\left(\beta J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)-\alpha\,\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}r)\right)$$

$$\Rightarrow \beta\,\Phi_{n,l}(l_r)+\alpha\Phi_{n,l}'(l_r)=0 \Leftrightarrow \beta J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}l_r)=\alpha\,\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}(\mu_{n,l}l_r)$$

$$\left\langle\Phi_{n,l}(r),\Phi_{n,m}(r)\right\rangle=\int_0^{l_r}dr\; r^{\,n-1}\Phi_{n,l}(r)\Phi_{n,m}(r)=\int_0^{l_r}dr\; r\,J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,m}r)=0 \quad si\; l\neq m \quad voir\; ci-après$$

$$\|\Phi_{n,l}(r)\|^2=\left\langle\Phi_{n,l}(r),\Phi_{n,m}(r)\right\rangle=\int_0^{l_r}dr\; r^{\,n-1}\left(\Phi_{n,l}(r)\right)^2$$

Le calcul de la norme des fonctions propres, de valeur propre non nulle, a déjà été obtenu par le calcul classique :

$$\|\Phi_{n,l}(r)\|^2=\int_0^{l_r}dz\; z\left(J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)\right)^2=\left[\frac{r^2}{2}\left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}'(\mu_{n,l}r)^2}{(\mu_{n,l})^2}+J_{\frac{n-2}{2}}(\mu_{n,l}r)^2\left(1-\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{r^2(\mu_{n,l})^2}\right)\right)\right]_0^{l_r}$$

Dans le cas qui nous occupe avec des conditions aux limites homogènes de Robin, il vient :

$$\left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2 = \frac{l_r^{\,2}}{2}\left(\frac{J_{\frac{n-2}{2}}'\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2}{\left(\mu_{n,l}\right)^2} + J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)^2\left(1-\frac{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2}{l_r^{\,2}\left(\mu_{n,l}\right)^2}\right)\right)$$

$$\textit{Dérivée}\ \frac{J_{\frac{n-2}{2}}'\left(\mu_{n,l}l_r\right)}{\mu_{n,l}} = \frac{n-2}{2}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}{\mu_{n,l}l_r} - J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)$$

$$\begin{cases} \left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2 = \dfrac{l_r^{\,2}}{2}\left(\left(J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\right)^2 + \left(J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\right)^2 - \dfrac{(n-2)}{\mu_{n,l}l_r}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\right) \\ tq \quad \beta J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right) = \alpha\,\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2 = \dfrac{l_r^{\,2}}{2}\left(J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\right)^2\left(1-\dfrac{(n-2)}{l_r}\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}^{\,2}\right) \\ \left\|\Phi_{n,l}(r)\right\|^2 = \dfrac{l_r^{\,2}}{2}\left(J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\right)^2\left(1-\dfrac{\beta}{\alpha}\dfrac{(n-2)}{\mu_{n,l}^{\,2}l_r}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2\mu_{n,l}^{\,2}}\right) \end{cases}$$

Le développement en série de la solution est donc :

$$\mu \to \mu_{n,l} \quad tq \quad \beta J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right) = \alpha\,\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right) \quad A_l = \int_0^{l_r} dr\, r^{\frac{n}{2}} f(r) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)$$

$$T_u(r,t) = \frac{2}{l_r^{\,2}} r^{\frac{2-n}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} A_l \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}}{\left(J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\right)^2 + \left(J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\right)^2 - \dfrac{(n-2)}{\mu_{n,l}l_r}J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}$$

Le cas d'une fonction initiale constante conduit à la solution suivante :

$$\mu \to \mu_{n,l} \quad tq \quad \beta J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right) = \alpha\,\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right) \quad A_l = T_0\int_0^{l_r} dr\, r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right) \quad \textit{Posons}\ \ \nu = \frac{n-2}{2} \quad \gamma = \mu_{n,l}l_r \quad z = \mu_{n,l}r$$

$$A_l = T_0\int_0^{l_r} dr\, r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right) = T_0\frac{l_r^{\,\nu+2}}{\gamma^{\nu+2}}\int_0^{\gamma} dz\, z^{\nu+1} J_\nu(z) = T_0 l_r^{\,\nu+2}\frac{J_{\nu+1}(\gamma)}{\gamma} = T_0 l_r^{\frac{n}{2}}\frac{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)}{\mu_{n,l}}$$

$$\Rightarrow T_u(r,t) = \frac{2T_0}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)e^{-\delta\,\mu_{n,l}^{\,2}t}}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\left(1-\dfrac{(n-2)}{l_r}\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}^{\,2}\right)} \quad tq \quad \beta J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right) = \alpha\,\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)$$

Une fonction initiale quadratique de la forme r^2 conduit à la solution suivante :

$$Calculons \quad A_l = I_2 = \int_0^{l_r} dr\, r^{\frac{n}{2}} r^2 J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) \quad Posons\ \gamma = \mu_{n,l} l_r \quad z = \mu_{n,l} r \quad et \quad J_{\nu+1}(\alpha) = 0$$

$$\mu_{n,l}^{\frac{n}{2}+3} = \frac{\gamma^{\frac{n}{2}+3}}{l_r^{\frac{n}{2}+3}} = \frac{\gamma^{\nu+4}}{l_r^{\nu+4}} \quad \Rightarrow A_l = I_2 = \frac{l_r^{\nu+4}}{\gamma^{\nu+4}} \int_0^{\gamma} dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) \qquad Ici \quad \nu = \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} - 1$$

$$On\ sait\ que \quad I_0 = l_r^2 \int_0^{l_r} dr\, r^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) = l_r^{\nu+4} \frac{J_{\nu+1}(\gamma)}{\gamma}$$

$$\int dz\, z^\lambda J_\nu(z) = \left[z^\lambda J_{\nu+1}(z)\right] + (\nu+1-\lambda)\int dz\, z^{\lambda-1} J_{\nu+1}(z)$$

$$\int dz\, z^\lambda J_\nu(z) = \left[z^\lambda J_{\nu+1}(z) + (\lambda-\nu-1) z^{\lambda-1} J_\nu(z)\right] + \left(\nu^2 - (\lambda-1)^2\right)\int dz\, z^{\lambda-2} J_\nu(z)$$

$$Posons\ \lambda = \nu+3 \Rightarrow \int dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left[z^{\nu+3} J_{\nu+1}(z) + 2z^{\nu+2} J_\nu(z)\right] - 4(\nu+1)\int dz\, z^{\nu+1} J_\nu(z)$$

$$\Rightarrow \int dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left[z^{\nu+1}\left(z^2 - 4(\nu+1)\right) J_{\nu+1}(z) + 2z^{\nu+2} J_\nu(z)\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^{\gamma} dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) = \left.\begin{cases} \gamma^{\nu+1}\left[\left(\gamma^2 - 4(\nu+1)\right) J_{\nu+1}(\gamma) + 2\gamma J_\nu(\gamma)\right] \\ \gamma^{\nu+2}\left[\gamma J_{\nu+1}(\gamma) - 2J_{\nu+2}(\gamma)\right] \end{cases}\right\} \Leftarrow J_\nu(\gamma) = \frac{2(\nu+1)}{\gamma} J_{\nu+1}(\gamma) - J_{\nu+2}(\gamma)$$

$$De\ plus \quad \beta\, l_r J_\nu(\gamma) = \alpha\, \gamma\, J_{\nu+1}(\gamma) \Leftrightarrow \beta\, J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right) = \alpha\, \mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)$$

$$A_l = \frac{l_r^{\nu+4}}{\gamma^{\nu+4}} \int_0^{\gamma} dz\, z^{\nu+3} J_\nu(z) = \frac{l_r^{\nu+4}}{\gamma^3}\left[\left(\gamma^2 - 4(\nu+1)\right) J_{\nu+1}(\gamma) + 2\gamma J_\nu(\gamma)\right] = \frac{l_r^{\nu+4}}{\gamma^3}\begin{cases} \gamma J_\nu(\gamma)\left(2 + \frac{\beta}{\alpha} l_r\left(1 - \frac{4(\nu+1)}{\gamma^2}\right)\right) \\ \gamma^2 J_{\nu+1}(\gamma)\left(1 - \frac{4(\nu+1)}{\gamma^2} + \frac{\alpha}{\beta}\frac{2}{l_r}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_l = \frac{l_r^{\frac{n+4}{2}}}{\mu_{n,l}} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)\left(1 - \frac{2n}{\mu_{n,l}^2 l_r^2} + \frac{2}{l_r}\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$$Calculons \quad B_l = \int_0^{l_r} dr\, r^{\frac{n}{2}}\left(l_r^2 - r^2\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) = \frac{l_r^{\nu+4}}{\gamma^2}\begin{cases} J_\nu(\gamma)\left(-2 + \frac{\beta}{\alpha} l_r \frac{4(\nu+1)}{\gamma^2}\right) \\ \gamma J_{\nu+1}(\gamma)\left(\frac{4(\nu+1)}{\gamma^2} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{2}{l_r}\right) \end{cases}$$

$$T_u(r,t) = 2 l_r \left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{2n}{\mu_{n,l}^2 l_r^2} + \frac{2}{l_r}\frac{\alpha}{\beta}\right) J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) e^{-\delta\, \mu_{n,l}^2 t}}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)\left(1 - \frac{(n-2)}{l_r}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}^2\right)} \quad tq \quad \beta\, J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right) = \alpha\, \mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)$$

Pour les problèmes suivants, on utilise les résultats du théorème de Duhamel :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial r^2}+\left(\frac{n-1}{r}\right)\frac{\partial T(x,t)}{\partial r}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=0 \quad \textit{avec terme de diffusivité } \delta$$

$$r=\|\vec{x}\| \quad \|\vec{x}\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} x_i^2} \quad \vec{x}\in\Omega=\left\{\vec{x}\,/\|\vec{x}\|\le l_r\right\} \textit{ de frontière } \partial\Omega=\left\{\vec{x}\,/\|\vec{x}\|=l_r\right\}$$

$$C.L. \quad \beta T(\vec{x},t)+\alpha\left.\frac{\partial T(\vec{x},t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=\varphi_2(t) \quad C.I \quad T(\vec{x},0)=0$$

<u>*Application du théorème de Duhamel à la solution*</u>

La solution du problème $T_w(r,t)\begin{cases} C.L. \quad T_w(0,t) \quad fini \\ C.L. \quad \beta T_w(l_r,t)+\alpha\dfrac{\partial T_w(l_r,t)}{\partial r}=\varphi_2(t) \\ C.I. \quad T_w(r,0)=0 \end{cases}$ *est dérivée du problème à température fixée aux limites du domaine :*

$T_w(r,\lambda,t)=\varphi_2(\lambda)T_{w2}(r,t)$ $\begin{cases} C.L. \quad T_{w2}(0,t) \quad fini \\ C.L. \quad \beta T_{w2}(l_r,t)+\alpha\dfrac{\partial T_{w2}(l_r,t)}{\partial r}=1 \\ C.I. \quad T_{w2}(r,0)=0 \end{cases}$. *Avec la solution pour* T_{w2} *:*

$$\begin{cases} C.L. \quad T_{w2}(0,t) \quad fini \\ C.L. \quad \beta T_{w2}(l_r,t)+\alpha\dfrac{\partial T_{w2}(l_r,t)}{\partial r}=1 \\ C.I. \quad T_{w2}(r,0)=0 \end{cases} \Rightarrow T_{w2}(r,t)=\frac{1}{\beta}+T_t(r,t) \quad T_t(r,t)\begin{cases} C.L. \quad T_t(0,t) \quad fini \\ C.L. \quad \beta T_t(l_r,t)+\alpha\dfrac{\partial T_t(l_r,t)}{\partial r}=0 \\ C.I. \quad T_t(r,0)=-\dfrac{1}{\beta} \end{cases}$$

$$Or \quad T_t(r,t)=-\frac{2}{\beta l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)e^{-\delta\mu_{n,l}^2 t}}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\left(1-\frac{(n-2)}{l_r}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}^2\right)}$$

$$\Rightarrow T_{w2}(r,t)=\frac{1}{\beta}-\frac{2}{\beta l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l}r\right)e^{-\delta\mu_{n,l}^2 t}}{\mu_{n,l}J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l}l_r\right)\left(1-\frac{(n-2)}{l_r}\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}^2\right)}$$

Ce qui donne pour la solution du problème initial de Duhamel :

$$\mu_{n,l} \quad tq \quad \beta J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right) = \alpha\, \mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)$$

$$T_w(r,\lambda,t) = \frac{\varphi_2(\lambda)}{\beta}\left(1 - \frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) e^{-\delta\, \mu_{n,l}{}^2 t}}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)\left(1 - \frac{(n-2)}{l_r}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}{}^2\right)}\right)$$

$$\Rightarrow T_w(r,\lambda,t-\lambda) = \frac{\varphi_2(\lambda)}{\beta}\left(1 - \frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) e^{-\delta\, \mu_{n,l}{}^2 (t-\lambda)}}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)\left(1 - \frac{(n-2)}{l_r}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}{}^2\right)}\right)$$

Et par application du théorème de Duhamel :

$$Posons \quad F_2(r,t-\lambda) = \frac{1}{\beta}\left(1 - \frac{2}{l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) e^{-\delta\, \mu_{n,l}{}^2 (t-\lambda)}}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)\left(1 - \frac{(n-2)}{l_r}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}{}^2\right)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} F_2(r,t-\lambda) = \frac{2\delta}{\beta\, l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{\mu_{n,l} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) e^{-\delta\, \mu_{n,l}{}^2 (t-\lambda)}}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)\left(1 - \frac{(n-2)}{l_r}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}{}^2\right)}$$

$$Comme \quad T_w(r,t) = \int_0^t d\lambda \varphi_2(\lambda)\, \frac{\partial}{\partial t} F_2(r,t-\lambda)$$

$$\Rightarrow T_w(r,t) = \frac{2\delta}{\beta\, l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} e^{-\delta\, \mu_{n,l}{}^2 t}\, \frac{\mu_{n,l} J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right)}{J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)\left(1 - \frac{(n-2)}{l_r}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}{}^2\right)}\left(\int_0^t d\lambda\, \varphi_2(\lambda) e^{\delta\, \mu_{n,l}{}^2 \lambda}\right)$$

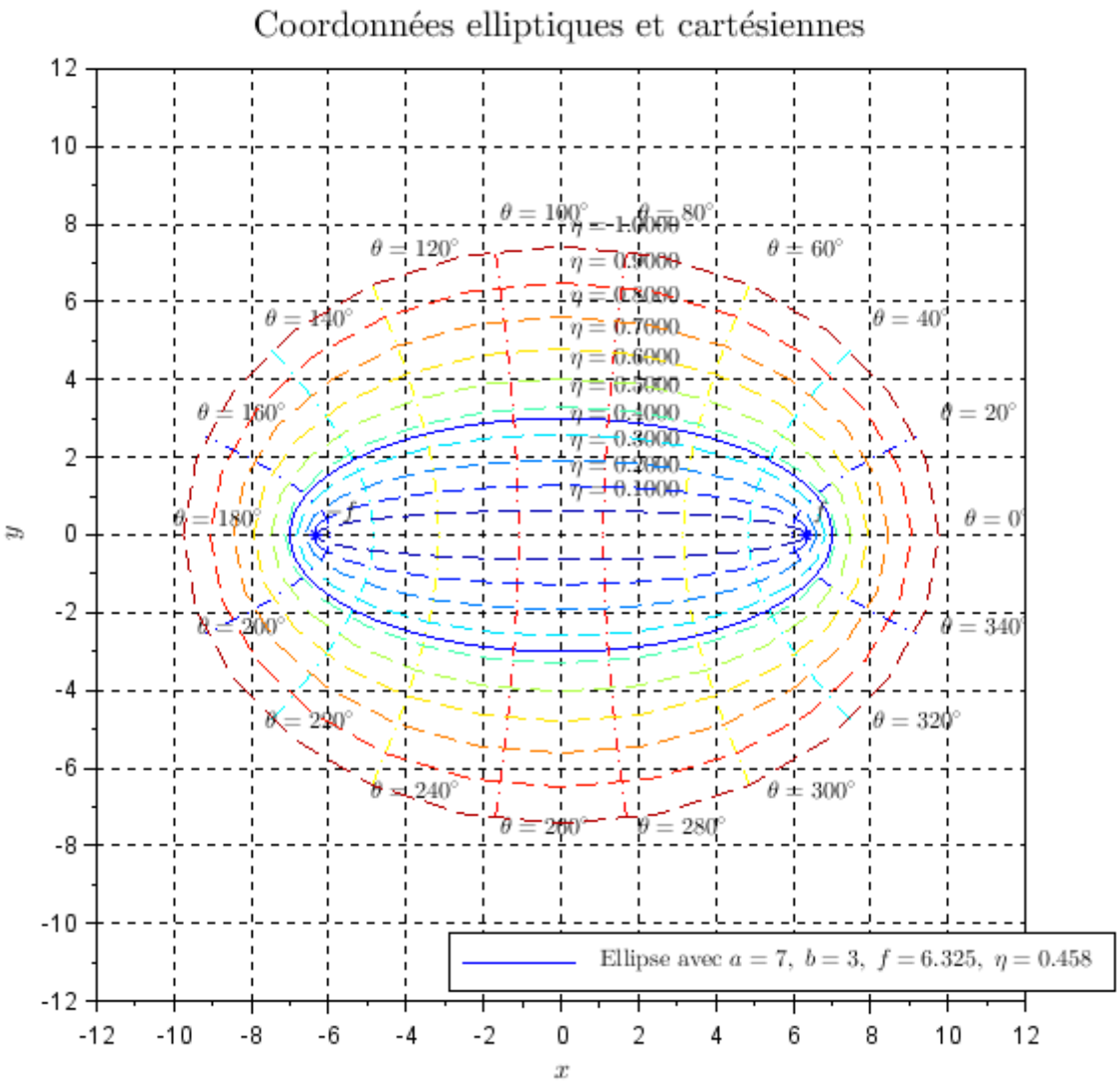
Ce qui conduit lorsque la condition aux limites de surface est fixe , Ts :

$$\begin{cases} C.L. \quad T_w(0,t) \quad fini \\ C.L. \quad \beta\, T_w(l_r,t) + \alpha \dfrac{\partial T_w(l_r,t)}{\partial r} = T_s \\ C.I. \quad T_w(r,0) = 0 \end{cases}$$

à la solution déjà évoquée :

$$T_w(r,t) = T_s\left\{\frac{1}{\beta} - \frac{2}{\beta\, l_r}\left(\frac{l_r}{r}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}\left(\mu_{n,l} r\right) e^{-\delta\, \mu_{n,l}{}^2 t}}{\mu_{n,l} J_{\frac{n}{2}}\left(\mu_{n,l} l_r\right)\left(1 - \frac{(n-2)}{l_r}\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\mu_{n,l}{}^2\right)}\right\}$$

Problème de diffusion en coordonnées elliptiques polaires à deux dimensions



On a vu que le système elliptique polaire est défini par le changement de variable :

$$x = c\ Cosh(\eta)\ Cos(\vartheta)$$
$$y = c\ Sinh(\eta)\ Cos(\vartheta)$$

Les variables η, ϑ sont respectivement les variables radiale et angulaire du système de coordonnées elliptique polaire, a est une paramètre d'échelle. Le Laplacien en coordonnées elliptique 2D (η,ϑ) s'écrit sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta,t) = \frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta) - Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,t)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T(\eta,\theta,t)}{\partial \theta^2}\right)$$

L'équation de diffusion s'écrit donc :

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,t)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,t)}{\partial\theta^2}\right)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial t}=0$$

$$(\eta,\theta)\in\Omega \text{ de frontière } \partial\Omega$$

$$C.L.\quad \beta\, T(\eta,\theta,t)+\alpha\left.\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=f_{\partial\Omega}(\eta,\theta)$$

$$C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0(\eta,\theta)$$

Par séparation des variables la solution de l'équation s'écrit :

$$T(\eta,\theta,t)=U(\eta,\theta)D(t)$$

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial\theta^2}\right)+\mu_n^2\, U(\eta,\theta)=0\quad \mu_n>0$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{D'(t)}{D(t)}=-\mu_n^2\Rightarrow D(t)=e^{-\delta\mu_n^2 t}$$

$$T(\eta,\theta,t)=\sum_{\mu_n,n=1,+\infty} a_n\, U_{\mu_n^2}(\eta,\theta)\, e^{-\delta\mu_n^2 t}$$

Si l'on poursuit la séparation des variables sur les deux coordonnées radiale et angulaire :

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 U(\eta,\theta)}{\partial\theta^2}\right)+\mu^2 U(\eta,\theta)=0 \Leftarrow U(\eta,\theta)=R(\eta)\Theta(\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\left(R''(\eta)\Theta(\theta)+R(\eta)\Theta''(\theta)\right)}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}+\mu^2 R(\eta)\Theta(\theta)=0 \Rightarrow \frac{\left(\frac{R''(\eta)}{R(\eta)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}\right)}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}=-\mu^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{R''(\eta)}{R(\eta)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}\right)=-\mu^2 c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right) \Rightarrow \frac{R''(\eta)}{R(\eta)}+\mu^2 c^2 Cosh^2(\eta)=-\left(\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}-\mu^2 c^2 Cos^2(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{R''(\eta)}{R(\eta)}+\mu^2 c^2 Cosh^2(\eta)=\alpha_2 \quad et \quad \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}-\mu^2 c^2 Cos^2(\theta)=-\alpha_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta''(\theta)+(\alpha_2-\frac{\mu^2 c^2}{2}-2\frac{\mu^2 c^2}{4}Cos(2\theta))\Theta(\theta)=0 \\ R''(\eta)-(\alpha_2-\frac{\mu^2 c^2}{2}-2\frac{\mu^2 c^2}{4}Cosh(2\eta))R(\eta)=0 \end{cases}$$

$$En\ posant\ q=\frac{\mu^2 c^2}{4}\ et\ \lambda=\alpha_2-\frac{\mu^2 c^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \Theta''(\theta)+(\lambda-2q\ Cos(2\theta))\Theta(\theta)=0 & \text{équation de Mathieu} \\ R''(\eta)-(\lambda-2q\ Cosh(2\eta))R(\eta)=0 & \text{équation de Mathieu modifiée} \end{cases}$$

Les solutions formelles du problème se présentent ainsi :

$$q=|q|=\frac{\mu^2 c^2}{4}\ et\ \lambda=\alpha_2-\frac{\mu^2 c^2}{2}$$

$$\Theta''(\theta)+(\lambda-2|q|\ Cos(2\theta))\Theta(\theta)=0 \quad \text{équation de Mathieu}$$

$$\Theta(\theta)=A_\theta\ ce_n(\theta,|q|)+B_\theta\ fe_n(\theta,|q|) \quad ou\ bien \quad \Theta(\theta)=A_\theta\ se_n(\theta,|q|)+B_\theta\ ge_n(\theta,|q|)$$

avec

$ce_n(\theta,q), se_n(\theta,q)$ *fonction de Mathieu de première espèce*

$fe_n(\theta,q), ge_n(\theta,q)$ *fonction de Mathieu de deuxième espèce*

$$R''(\eta)-(\lambda-2|q|\ Cosh(2\eta))R(\eta)=0 \quad \text{équation de Mathieu modifiée } \theta\rightarrow i\eta$$

$$R(\eta)=C_r\ ce_n(i\eta,|q|)+D_r\ fe_n(i\eta,|q|) \quad ou\ bien \quad R(\eta)=C_r\ se_n(i\eta,|q|)+D_r\ ge_n(i\eta,|q|)$$

$$\Rightarrow R(\eta)=C_r\ Je_n(\eta,|q|)+D_r\ Ne_n(\eta,|q|) \quad ou\ bien \quad R(\eta)=C_r\ Jo_n(\eta,|q|)+D_r\ No_n(\eta,|q|)$$

$Je_n(\eta,q), Jo_n(\eta,q)$ *fonction de Mathieu modifiée de première espèce*

$Ne_n(\eta,q), No_n(\eta,q)$ *fonction de Mathieu modifiée de deuxième espèce*

n indice des solutions = 0,1,2,3...

<u>Problème de réchauffement :</u> *Cylindre de longueur infinie de section elliptique soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes de température T_0, problème de réchauffement.*

$$\Delta T(\eta,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad \alpha \frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial \eta} + \beta\, T(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_0} = \beta\, T_0$$

$$C.I \quad T(\eta,\theta,0) = 0$$

On est dans le cas n°2 sur la dimension radiale, mais il est très facile de revenir au cas n°1, car la solution du régime permanent est triviale. En décomposant les parties transitoires et permanentes $T(\eta,\theta,t) = T_p(\eta,\theta) + T_t(\eta,\theta,t)$. *La solution du régime permanent est par évidence $T_p(\eta,\vartheta)=T_0$.*
Et le régime transitoire est solution du problème suivant qui correspond au cas n°1 :

$$\Delta T_t(\eta,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad \alpha \frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta} + \beta\, T_t(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$C.I \quad T_t(\eta,\theta,0) = -T_0$$

Les conditions aux limites homogènes, la condition initiale et la configuration géométrique elliptique font que la solution recherchée doit être paire, et de période π.

Soit $\forall t\,,\, T_t(\eta,\theta,t) = T_t(\eta,-\theta,t) \quad et \quad T_t(\eta,\theta,t) = T_t(\eta,\theta+\pi,t)$
$\Rightarrow U(\eta,\theta) = U(\eta,-\theta) \quad et \quad U(\eta,\theta) = U(\eta,\theta+\pi)$

D'après les propriétés des fonctions de Mathieu périodiques. La solution du régime transitoire est à rechercher sous la forme d'une série, mais nous verrons que la multiplicité des valeurs propres du problème aux limites est en réalité plus importante lorsque l'on prend en compte les conditions aux limites homogènes :

$$U_{\lambda_n}(\eta,\theta) = Je_{2n}(\eta,q)\, ce_{2n}(\eta,q)$$

$$T_t(\eta,\theta,t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n Je_{2n}(\eta,q)\, ce_{2n}(\theta,q) e^{-\delta\mu^2 t} = \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n Je_{2n}(\eta,q)\, ce_{2n}(\theta,q) e^{-\frac{4q\delta}{c^2}t}$$

$$avec\ q = \frac{\mu^2 c^2}{4} \quad c\ paramètre\ d'échelle\ elliptique$$

Pour les deux fonctions de Mathieu et Mathieu modifiée, il est important de représenter ces fonctions comme décomposition de fonctions sinusoïdales et hyperboliques. Dans le cas de la fonction de Mathieu de première espèce, il s'agit effectivement de sa décomposition de Fourier :

$$ce_{2n}(\theta,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} Cos(2l\,\theta)$$

$$\begin{cases} Je_{2n}(\eta,q) = \dfrac{ce_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}} \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)} J_{2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(\eta)\right) = \dfrac{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{A_0^{(2n)}} \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l A_{2l}^{(2n)} J_{2l}\left(2\sqrt{q}Cosh(\eta)\right) \\ = \dfrac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2} \displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty} (-1)^l A_{2l}^{(2n)} J_{2l}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right) J_{2l}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) \end{cases}$$

Ce n'est pas facile de calculer ces coefficients, mais il existe des algorithmes pour estimer ces valeurs. Ces coefficients sont particulièrement important car ils servent justement à l'expression des intégrales définies sur l'intervalle des valeurs des coordonnées elliptiques.

Dans un premier temps retrouvons l'exemple donnée dans le livre de référence sur les fonctions de Mathieu de N.W. McLachlan (1947), et simplifions la conditions aux limites à celle de Dirichlet soit $U(\eta,\theta)\big|_{\eta=\eta_0} = 0$

Pour satisfaire à cette condition aux limites de Dirichlet, il suffit que $Je_{2n}(\eta_0,q) = 0$ *. Et le respect de ces conditions introduit une multiplicité supplémentaire des valeurs propres et fonctions propres admissibles dans le développement en série. Le deuxième indice m est ainsi introduit, en le faisant varier de 1 à l'infini. Il représente toutes les valeurs admissibles de q tel que l'équation transcendante* $Je_{2n}(\eta_0,q) = 0$ *soit vérifiée*

$$q_{2n,m}\ tq\ Je_{2n}(\eta_0,q_{2n,m}) = 0$$

$$T_t(\eta,\theta,t) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})\, ce_{2n}(\theta,q_{2n,m}) e^{-\delta\mu_{2n,m}^2 t}$$

$$avec \quad \mu_{2n,m}^2 = \frac{4\, q_{2n,m}}{c^2} \quad c\ paramètre\ d'échelle\ elliptique$$

Exemple : soit une ellipse de grand et petit axe a,b, le paramètre ε=b/a se calcule comme suit et les valeurs propres sont les suivantes :

$$\varepsilon = \frac{b}{a} \Rightarrow Cosh(\eta_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \rightarrow Je_{2n}(\eta_0, q_{2n,m}) = 0$$

$$\mathrm{n} = 0 \Rightarrow Je_0(\eta_0, q_{0,m}) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{0,m} = 0.6659712,\ 3.8214069,\ 9.778336,\ 18.514175,\ 30.026436$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{0,m} = 2.675045,\ 18.664299,\ 49.500992,\ 95.145574,\ 155.59564$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{0,m} = 6.215625,\ 47.7875,\ 128.8875,\ 249.4625$$

$$\mathrm{n} = 1 \Rightarrow Je_2(\eta_0, q_{2,m}) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{2,m} = 2.7204526,\ 7.4232052,\ 14.937313,\ 25.291423,\ 38.432201$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{2,m} = 7.5213012,\ 28.022784,\ 63.729458,\ 114.28136\ \ 179.65104$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{2,m} = 13.018683,\ 62.794186,\ 152.36748,\ 281.45415,\ 418.03752$$

$$\mathrm{n} = 2 \Rightarrow Je_4(\eta_0, q_{4,m}) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{4,m} = 6.1823218,\ 12.717788,\ 21.635037,\ 33.52658,\ 48.266678$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{4,m} = 15.63515,\ 40.148042,\ 80.589915,\ 135.98582,\ 206.23841$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{4,m} = 23.468485,\ 80.854477,\ 178.78862,\ 316.33769,\ 493.41248$$

$$\mathrm{n} = 3 \Rightarrow Je_6(\eta_0, q_{6,m}) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{6,m} = 10.762775,\ 19.614843,\ 30.099482,\ 43.337054,\ 59.60616$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{6,m} = 27.134765,\ 55.25241,\ 100.23603,\ 160.37911,\ 235.45584$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{6,m} = 37.8625,\ 102.1875,\ 208.2875,\ 354.2125$$

Il est intéressant de constater que l'on peut obtenir une valeur approchée de ces racines aux valeurs élevées du paramètre q, en utilisant une expression asymptotique de Goldstein prise au seul premier terme de développement, des fonctions de Mathieu radiales d'ordre entier (voir A.Erdelyi H.Bateman HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS_VOL_III, formule 7 section 16.7 page 127), ainsi que MachLaclan Theory and Application of Mathieu Functions, additionnal results 6, page 385, formules (1,2) pour les fonctions Je et Ne :

$$\begin{cases} Je_n(x,q) \approx \dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}} Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \\ Ne_n(x,q) \approx \dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}} Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \end{cases} \quad q \quad très \quad grand$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Je_n'(x,q) \approx -2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}ce_n(0,q)Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \\ Ne_n'(x,q) \approx 2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}ce_n(0,q)Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \end{cases}$$

$$De\ plus \quad ArcTan\left(Tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}ArcTan(Sinh(x))$$

L'expression de Goldstein ne met en jeu que des fonctions élémentaires, et il est facile d'obtenir des expressions approchées des racines d'une équation transcendantale. Prenons pour une condition aux limites $U(\eta,\theta)\big|_{\eta=\eta_0}=0$*, la première équation* $Cosh(\eta_0)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\rightarrow Je_{2n}(\eta_0,q)=0$*, l'équation transcendantale se réduit à une simple expression :*

$$Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(\eta_0)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)\right)=0\Rightarrow\sqrt{q_{n,m}}=\frac{\pi\dfrac{2m+1}{2}+(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta_0}{2}\right)\right)}{2Sinh(\eta_0)}$$

Prenons pour une condition aux limites $\left.\dfrac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial\eta}\right|_{\eta=\eta_0}=0$*, une deuxième équation que l'on aborde plus loin* $Cosh(\eta_0)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\rightarrow Je_{2n}'(\eta_0,q)=0$*, l'équation transcendantale se réduit :*

$$Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(\eta_0)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)\right)=0\Rightarrow\sqrt{q_{n,m}}=\frac{m\pi+(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta_0}{2}\right)\right)}{2Sinh(\eta_0)}$$

Prenons pour une condition aux limites de Robin simplifiée de la forme $\left.\alpha\dfrac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial\eta}+\beta\,U(\eta,\theta)\right|_{\eta=\eta_0}=0$*, une deuxième équation que l'on aborde plus loin* $Cosh(\eta_0)=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\rightarrow\alpha Je_{2n}'(\eta_0,q)+\beta Je_{2n}(\eta_0,q)=0$*, l'équation transcendantale se réduit :*

$$-2\alpha\sqrt{q}\sqrt{Cosh(\eta_0)}Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(\eta_0)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)\right)+\frac{\beta}{\sqrt{Cosh(\eta_0)}}Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{q}Tan\left(2\sqrt{q}Sinh(\eta_0)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)\right)=\frac{\beta}{\alpha\,Cosh(\eta_0)}$$

Prenons maintenant des conditions aux limites sur un cylindre creux de section elliptique, selon les 4 types de conditions Neumann ou Dirichlet en face interne ou externe, les expressions approchées des équations transcendantales donnent :

$$Dirichlet\ interne \quad Dirichlet\ externe \qquad U(\eta,\theta)\big|_{\eta=\eta_1} = U(\eta,\theta)\big|_{\eta=\eta_2} = 0$$

$$\Rightarrow Je_n(\eta_1,q)Ne_n(\eta_2,q) - Ne_n(\eta_1,q)Je_n(\eta_2,q) = 0$$

$$\Rightarrow Sin\left(2\sqrt{q}\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right) - (2n+1)\left(ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_2}{2}\right)\right) - ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_1}{2}\right)\right)\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{q_{n,m}} = \frac{m\pi + (2n+1)\left(ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_2}{2}\right)\right) - ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_1}{2}\right)\right)\right)}{2\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right)} = \frac{m\pi + (2n+1)ArcTan\left(\dfrac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_2+\eta_1}{2}\right)}\right)}{2\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right)}$$

$$Dirichlet\ interne \quad Neumann\ externe \qquad U(\eta,\theta)\big|_{\eta=\eta_1} = \frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=\eta_2} = 0$$

$$\Rightarrow Je_n(\eta_1,q)Ne_n'(\eta_2,q) - Ne_n(\eta_1,q)Je_n'(\eta_2,q) = 0$$

$$\Rightarrow Cos\left(2\sqrt{q}\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right) - (2n+1)\left(ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_2}{2}\right)\right) - ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_1}{2}\right)\right)\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{q_{n,m}} = \frac{\frac{2m+1}{2}\pi + (2n+1)\left(ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_2}{2}\right)\right) - ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_1}{2}\right)\right)\right)}{2\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right)} = \frac{\frac{2m+1}{2}\pi + (2n+1)ArcTan\left(\dfrac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_2+\eta_1}{2}\right)}\right)}{2\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right)}$$

$$Neumann\ interne \quad Dirichlet\ externe \qquad U(\eta,\theta)\big|_{\eta=\eta_2} = \frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=\eta_1} = 0$$

$$\Rightarrow Je_n(\eta_1,q)Ne_n'(\eta_2,q) - Ne_n(\eta_1,q)Je_n'(\eta_2,q) = 0$$

$$\Rightarrow Cos\left(2\sqrt{q}\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right) - (2n+1)\left(ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_2}{2}\right)\right) - ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_1}{2}\right)\right)\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{q_{n,m}} = \frac{\frac{2m+1}{2}\pi + (2n+1)\left(ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_2}{2}\right)\right) - ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_1}{2}\right)\right)\right)}{2\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right)} = \frac{\frac{2m+1}{2}\pi + (2n+1)ArcTan\left(\dfrac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_2+\eta_1}{2}\right)}\right)}{2\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right)}$$

$$Neumann\ interne \quad Neumann\ externe \qquad \frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=\eta_1} = \frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta}\bigg|_{\eta=\eta_2} = 0$$

$$\Rightarrow Je_n'(\eta_1,q)Ne_n'(\eta_2,q) - Ne_n'(\eta_1,q)Je_n'(\eta_2,q) = 0$$

$$\Rightarrow Sin\left(2\sqrt{q}\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right) - (2n+1)\left(ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_2}{2}\right)\right) - ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_1}{2}\right)\right)\right)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{q_{n,m}} = \frac{m\pi + (2n+1)\left(ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_2}{2}\right)\right) - ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_1}{2}\right)\right)\right)}{2\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right)} = \frac{m\pi + (2n+1)ArcTan\left(\dfrac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_2+\eta_1}{2}\right)}\right)}{2\left(Sinh(\eta_2) - Sinh(\eta_1)\right)}$$

Mais reprenons le cours des exemples de conditions aux limites et de la détermination numérique des racines valeurs propres de l'équation transcendantale associée.

La condition aux limites $\left.\frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_0} = 0$ *entraîne la condition sur les fonctions de Mathieu modifiées sous la forme de l'équation transcendante suivante :* $q_{2n,m}\ tq\ \left.\frac{\partial Je_{2n}(\eta,q)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_0} = 0$

Exemple : soir une ellipse de grand et petit axe a,b, le paramètre ε=b/a se calcule comme suit et les valeurs propres sont les suivantes :

$$\varepsilon = \frac{b}{a} \Rightarrow Cosh(\eta_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \rightarrow \left.\frac{dJe_{2n}(\eta_0, q_{2n,m})}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\mathrm{n} = 0 \Rightarrow \left.\frac{dJe_0(\eta_0, q_{0,m})}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{0,m} = 1.7852299,\ 6.351972,\ 13.70235,\ 23.82815,\ 36.729494$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{0,m} = 8.5689269,\ 32.022635,\ 70.271336,\ 123.32236,\ 191.177$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{0,m} = 21.799869,\ 83.164304,\ 183.99901,\ 310.1376$$

$$\mathrm{n} = 1 \Rightarrow \left.\frac{dJe_2(\eta_0, q_{2,m})}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{2,m} = 0.9679458,\ 4.6112685,\ 10.684682,\ 19.643659,\ 31.399871$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{2,m} = 2.1918328,\ 15.350431,\ 43.717379,\ 86.893551,\ 144.87488$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{2,m} = 2.6560865,\ 32.417413,\ 102.32013,\ 211.69067,\ 360.53973$$

$$\mathrm{n} = 2 \Rightarrow \left.\frac{dJe_4(\eta_0, q_{4,m})}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{4,m} = 3.0901449,\ 9.0575544,\ 16.665161,\ 27.076366,\ 40.415399$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{4,m} = 7.7233032,\ 25.07768,\ 58.084566,\ 106.10476,\ 168.97163$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{4,m} = 9.5403969,\ 46.187149,\ 124.44624,\ 242.28079,\ 399.62939$$

$$\mathrm{n} = 3 \Rightarrow \left.\frac{dJe_6(\eta_0, q_{6,m})}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{6,m} = 6.1829182,\ 14.840752,\ 24.42863,\ 36.175858,\ 50.96547$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{6,m} = 16.369346,\ 38.09812,\ 75.308147,\ 128.0417,\ 195.72131$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{6,m} = 20.559257,\ 63.386505,\ 149.71181,\ 275.89074,\ 441.67364$$

La condition aux limites $\alpha \frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta} + \beta\, U(\eta,\theta)\Big|_{\eta=\eta_0} = 0$ *n'est pas vraiment réaliste d'un point de vue physique. Il faudrait plutôt lui substituer la condition plus exacte de transfert par convection suivante :*

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}} \frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta} + \beta\, U(\eta,\theta)\Big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Leftrightarrow \alpha \frac{\partial U(\eta,\theta)}{\partial \eta} + \beta \sqrt{\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}\, U(\eta,\theta)\Big|_{\eta=\eta_0}$$

Toutefois comme cas académique je vais supposer que les deux termes restent constant dans l'espace, ce qui entraîne la condition sur les fonctions de Mathieu modifiées sous la forme de l'équation transcendante suivante :

$$\alpha \frac{\partial Je_{2n}(\eta,q)}{\partial \eta} + \beta\, Je_{2n}(\eta,q)\Big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Rightarrow q_{2n,m}\ tq\ \alpha \frac{\partial Je_{2n}(\eta,q)}{\partial \eta} + \beta\, Je_{2n}(\eta,q)\Big|_{\eta=\eta_0} = 0$$

Exemple : soit une ellipse de grand et petit axe a,b, le paramètre ε=b/a se calcule comme suit et les valeurs propres sont les suivantes :

$$\alpha = 1; \beta = 1 \quad \varepsilon = \frac{b}{a} \Rightarrow Cosh(\eta_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \rightarrow Je_{2n}(\eta_0,q_{2n,m}) + \frac{dJe_{2n}(\eta_0,q_{2n,m})}{d\eta}\Big|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$n = 0 \Rightarrow {dJe_0(\eta_0,q_{0,m})}/{d\eta} + Je_0(\eta_0,q_{0,m})\Big|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{0,m} = 0.1769469,\ 2.0161831,\ 6.5833232,\ 13.932089,\ 24.056887$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{0,m} = 0.5770468,\ 9.3567642,\ 32.79475,\ 71.03688,\ 124.08433$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{0,m} = 0.9917391,\ 23.181728,\ 84.526246,\ 185.35246,\ 310.13759$$

$$n = 1 \Rightarrow {dJe_2(\eta_0,q_{2,m})}/{d\eta} + Je_2(\eta_0,q_{2,m})\Big|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{2,m} = 1.3004577,\ 4.8576499,\ 10.935308,\ 19.89011,\ 31.642296$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{2,m} = 3.2715961,\ 16.304547,\ 44.583943,\ 87.724136,\ 145.68639$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{2,m} = 4.5410872,\ 34.050809,\ 103.81185,\ 213.13152,\ 417.33752$$

$$n = 2 \Rightarrow {dJe_4(\eta_0,q_{4,m})}/{d\eta} + Je_4(\eta_0,q_{4,m})\Big|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{4,m} = 3.543255,\ 9.3162202,\ 16.916207,\ 27.331419,\ 40.667112$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{4,m} = 9.0175249,\ 26.122873,\ 59.031189,\ 106.99437,\ 169.82943$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{4,m} = 11.774422,\ 48.04386,\ 126.06175,\ 243.80663,\ 401.11216$$

$$n = 3 \Rightarrow {dJe_6(\eta_0,q_{6,m})}/{d\eta} + Je_6(\eta_0,q_{6,m})\Big|_{\eta=\eta_0} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{6,m} = 6.7426205,\ 15.126958,\ 24.679022,\ 36.430335,\ 51.222264$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{6,m} = 17.87273,\ 39.161865,\ 76.319101,\ 128.98368,\ 196.62182$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{6,m} = 23.007439,\ 65.429413,\ 151.44368,\ 277.49865,\ 443.216$$

Pour respecter maintenant la condition initiale, il vient :

$$T_t(\eta,\theta,0) = -T_0 = -T_0 \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\, ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})$$

Pour déterminer les coefficients $B_{n,m}$, je vais utiliser les formules d'orthogonalité des fonctions de Mathieu.

$$B_{n,m} = \frac{\int_0^{\eta_0}\int_0^{2\pi} d\eta d\theta\, Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\, ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})\big(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\big)}{\int_0^{\eta_0}\int_0^{2\pi} d\eta d\theta \left(Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\right)^2 \left(ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})\right)^2 \big(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\big)}$$

$$\int_0^{\eta_0}\int_0^{2\pi} d\eta d\theta\, Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\, ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})\big(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\big) =$$

$$= \int_0^{\eta_0} d\eta\, Je_{2n}(\eta, q_{2n,m}) Cosh(2\eta) \int_0^{2\pi} d\theta\, ce_{2n}(\theta, q_{2n,m}) - \int_0^{\eta_0} d\eta\, Je_{2n}(\eta, q_{2n,m}) \int_0^{2\pi} d\theta\, ce_{2n}(\theta, q_{2n,m}) Cos(2\theta)$$

Avec

$$\int_0^{2\pi} d\theta\, ce_{2n}(\theta, q_{2n,m}) = \pi A_0^{(2n)} \qquad \int_0^{2\pi} d\theta\, ce_{2n}(\theta, q_{2n,m}) Cos(2\theta) = \pi A_2^{(2n)}$$

$$\int_0^{\eta_0} d\eta\, Je_{2n}(\eta, q_{2n,m}) Cosh(2\eta) = Ice_{2n} \qquad \int_0^{\eta_0} d\eta\, Je_{2n}(\eta, q_{2n,m}) = Jce_{2n}$$

$$\int_0^{\eta_0}\int_0^{2\pi} d\eta d\theta \left(Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\right)^2 \left(ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})\right)^2 \big(Cosh(2\eta) - Cos(2\theta)\big) =$$

$$= \int_0^{\eta_0} d\eta \left(Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\right)^2 Cosh(2\eta) \int_0^{2\pi} d\theta \left(ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})\right)^2 - \int_0^{\eta_0} d\eta \left(Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\right)^2 \int_0^{2\pi} d\theta \left(ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})\right)^2 Cos(2\theta)$$

$$Avec \quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} d\theta \left(ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})\right)^2 = \pi \qquad \int_0^{2\pi} d\theta \left(ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})\right)^2 Cos(2\theta) = \pi\, A_2^{(2n)} \\ \int_0^{\eta_0} d\eta \left(Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\right)^2 Cosh(2\eta) = Kce_{2n} \qquad \int_0^{\eta_0} d\eta \left(Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\right)^2 = Lce_{2n} \end{cases}$$

$$B_{n,m} = \frac{Ice_{2n}\pi A_0^{(2n)} - Jce_{2n}\pi A_2^{(2n)}}{Kce_{2n}\pi - Lce_{2n}\pi\, A_2^{(2n)}} = \frac{Ice_{2n} A_0^{(2n)} - Jce_{2n} A_2^{(2n)}}{Kce_{2n} - Lce_{2n} A_2^{(2n)}}$$

Cela donne donc comme solution du problème de réchauffement :

$$T(\eta,\theta,0) = T_0\left(1 - \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m} Je_{2n}(\eta, q_{2n,m})\, ce_{2n}(\theta, q_{2n,m})\, e^{-\frac{4 q_{2n,m}\delta}{c^2} t}\right)$$

Etude d'un problème transitoire de diffusion en coordonnées elliptiques avec conditions aux limites mixtes de Robin : cylindre de longueur infinie de section elliptique soumis à une condition initiale de température fixe 0, et une condition aux limites de Robin inhomogènes de température T_0, problème de réchauffement.

Le système elliptique polaire est défini par le changement de variable $\begin{array}{l} x = c\ Cosh(\eta)\ Cos(\vartheta) \\ y = c\ Sinh(\eta)\ Cos(\vartheta) \end{array}$.

Les variables η, ϑ sont respectivement les variables radiale et angulaire du système de coordonnées elliptique polaire, c est une paramètre d'échelle.

$$\Delta T(\eta,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta) - Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,t)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T(\eta,\theta,t)}{\partial \theta^2}\right) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta) - Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial \eta} + \beta\ T(\eta,\theta,t)\Bigg|_{\eta=\eta_0} = \beta\ T_0 \qquad C.I \quad T(\eta,\theta,0) = 0$$

On décompose les parties transitoires et permanentes $T(\eta,\theta,t) = T_p(\eta,\theta) + T_t(\eta,\theta,t)$. *La solution du régime permanent est par évidence $T_p(\eta,\vartheta)=T_0$. et le régime transitoire est solution du problème suivant qui correspond au cas n°1 :*

$$\Delta T_t(\eta,\theta,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial t} = 0$$

$$C.L. \quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta) - Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta} + \beta\ T_t(\eta,\theta,t)\Bigg|_{\eta=\eta_0} = 0 \qquad C.I \quad T_t(\eta,\theta,0) = -T_0$$

Les conditions aux limites homogènes, la condition initiale et la configuration géométrique elliptique font que la solution recherchée doit être paire, et de période π. Soit
$\forall t\ ,\ T_t(\eta,\theta,t) = T_t(\eta,-\theta,t) \quad et \quad T_t(\eta,\theta,t) = T_t(\eta,\theta+\pi,t)$.

Par séparation des variables la solution on arrive à un système de fonctions propres :

$$q = |q| = \frac{\mu^2 c^2}{4}\ et\ \lambda = \alpha_2 - \frac{\mu^2 c^2}{2} \Rightarrow \mu^2 = \frac{4q}{c^2}$$

$$\Theta''(\theta) + (\lambda - 2|q|\ Cos(2\theta))\Theta(\theta) = 0 \quad \text{équation de Mathieu}$$

$$\Theta(\theta) = A_\theta\ ce_n(\theta,|q|) + B_\theta\ fe_n(\theta,|q|) \quad ou\ bien \quad \Theta(\theta) = A_\theta\ se_n(\theta,|q|) + B_\theta\ ge_n(\theta,|q|)$$

avec

$ce_n(\theta,q), se_n(\theta,q)$ *fonction de Mathieu de première espèce*

$fe_n(\theta,q), ge_n(\theta,q)$ *fonction de Mathieu de deuxième espèce*

$$R''(\eta) - (\lambda - 2|q|\ Cosh(2\eta))R(\eta) = 0 \quad \text{équation de Mathieu modifiée } \theta \to i\,\eta$$

$$R(\eta) = C_r\ ce_n(i\eta,|q|) + D_r\ fe_n(i\eta,|q|) \quad ou\ bien \quad R(\eta) = C_r\ se_n(i\eta,|q|) + D_r\ ge_n(i\eta,|q|)$$

$$\Rightarrow R(\eta) = C_r\ Je_n(\eta,|q|) + D_r\ Ne_n(\eta,|q|) \quad ou\ bien \quad R(\eta) = C_r\ Jo_n(\eta,|q|) + D_r\ No_n(\eta,|q|)$$

$Je_n(\eta,q), Jo_n(\eta,q)$ *fonction de Mathieu modifiée de première espèce*

$Ne_n(\eta,q), No_n(\eta,q)$ *fonction de Mathieu modifiée de deuxième espèce*

n indice des solutions = 0,1,2,3...

D'après les propriétés des fonctions de Mathieu périodiques. La solution complète est à rechercher sous la forme d'une série, la multiplicité des valeurs propres du problème aux limites est fonction des conditions aux limites homogènes. La décomposition est logiquement à double indice, un indice n lié à la décomposition en fonctions angulaire périodique de Mathieu , et un indice lié aux valeurs propres $q_{n,m}$ obtenu d'après le respect des conditions aux limites homogènes sur la surface pour chaque indice n :

$$U_{2n,m}(\eta,\theta) = Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})\, ce_{2n}(\eta,q_{2n,m}) \quad T(\eta,\theta,t) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty} B_{2n} Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})\, ce_{2n}(\theta,q_{2n,m}) e^{-\delta\frac{4q_{2n,m}}{c^2}t}$$

$$c \text{ paramètre d'échelle elliptique}$$

Pour les deux fonctions de Mathieu et Mathieu modifiée, il est important de représenter ces fonctions comme décomposition de fonctions sinusoïdales et hyperboliques. Dans le cas de la fonction de Mathieu de première espèce, il s'agit effectivement de sa décomposition de Fourier :

$$ce_{2n}(\theta,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)}(q) Cos(2l\theta) \qquad Je_{2n}(\eta,q) = \sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2n)}(q) Cosh(2l\,\eta)$$

$$\text{Orthogonalité des fonctions de Mathieu} \qquad \int_0^{2\pi} d\theta\, ce_{2l}(\theta,q) ce_{2n}(\theta,q) = \pi\,\partial_{l,n} \Rightarrow 2\left(A_0^{(2n)}(q)\right)^2 + \sum_{l=1}^{l=\infty}\left(A_{2l}^{(2n)}(q)\right)^2 = 1$$

$$\text{Décomposition en fonction de Mathieu}$$

$$1 = \sum_{l=0}^{l=\infty} C_{2l} ce_{2l}(\theta,q) \Rightarrow C_{2l} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, ce_{2l}(\theta,q) = \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty} A_{2m}^{(2l)}(q)\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2m\theta) = \frac{2\pi}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty} A_{2m}^{(2l)}(q)\partial_{m,0} = 2A_0^{(2l)}(q) \Rightarrow 1 = 2\sum_{l=0}^{l=\infty} A_0^{(2l)}(q) ce_{2l}(\theta,q)$$

$$Cos(2n\theta) = \sum_{l=0}^{l=\infty} D_{2l} ce_{2l}(\theta,q) \Rightarrow D_{2l} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, ce_{2l}(\theta,q) Cos(2n\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \sum_{m=0}^{m=\infty} A_{2m}^{(2l)}(q) Cos(2m\theta) Cos(2n\theta)$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{m=\infty} A_{2m}^{(2l)}(q)\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2m\theta) Cos(2n\theta) = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_{2m}^{(2l)}(q)\partial_{m,n}\left(1+\partial_{n,0}\right) = \left(1+\partial_{n,0}\right) A_{2n}^{(2l)}(q) \Rightarrow Cos(2n\theta) = \sum_{l=0}^{l=\infty}\left(1+\partial_{n,0}\right) A_{2n}^{(2l)}(q) ce_{2l}(\theta,q)$$

Pour satisfaire à la condition aux limites mixtes, il vient :

$$T_t(\eta,\theta,t) = \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty} B_{2p,m} Je_{2n}\left(\eta,q_{2p,m}\right) ce_{2p}(\theta,q_{2p,m}) e^{-\delta\frac{4q_{2p,m}}{c^2}t}$$

$$\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial\eta} = \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty} B_{2p,m}\frac{dJe_{2p}\left(\eta,q_{2p,m}\right)}{d\eta} ce_{2n}(\theta,q_{2p,m}) e^{-\delta\frac{4q_{2p,m}}{c^2}t}$$

$$\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial\eta} + \beta\, T_t(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_0} = 0 \Leftarrow Cosh^2(\eta) - Cos^2(\theta) = \frac{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}{2}$$

$$\frac{\alpha\sqrt{2}}{c\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial\eta} + \beta\, T_t(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_0} = \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial\eta} + \frac{\beta}{\alpha}\, T_t(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_0} \Rightarrow h = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{c\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}}\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty} B_{2p,m}\frac{dJe_{2p}\left(\eta_0,q_{2p,m}\right)}{d\eta} ce_{2p}(\theta,q_{2p,m}) e^{-\delta\frac{4q_{2p,m}}{c^2}t} + \\ + \beta\displaystyle\sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty} B_{2p,m} Je_{2p}\left(\eta_0,q_{2p,m}\right) ce_{2p}(\theta,q_{2p,m}) e^{-\delta\frac{4q_{2p,m}}{c^2}t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{p=0}^{p=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty} B_{2p,m}\left\{\beta\, Je_{2p}\left(\eta_0,q_{2p,m}\right) + \frac{\alpha\sqrt{2}}{c\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}}\frac{dJe_{2p}\left(\eta_0,q_{2p,m}\right)}{d\eta}\right\} ce_{2p}\left(\theta,q_{2p,m}\right) e^{-\delta\frac{4q_{2p,m}}{c^2}t} = 0 \right.$$

La condition aux limites devant être également vérifiée en tout temps, donc également à l'instant initial t=0, elle doit l'être pour chaque valeur de q, cela signifie que les termes suivants doivent être nuls et permettre de déterminer le spectre des valeurs du paramètre q, qui pour la suite du calcul sont simplifiés en ôtant les indices :

$$\beta \sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p} Je_{2p}(\eta_0,q)\, ce_{2p}(\theta,q) + \frac{\alpha\sqrt{2}}{c\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \sum_{n=0}^{n=\infty} B_{2p} \frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\, ce_{2p}(\theta,q) = 0$$

En multipliant l'équation par chaque composante $ce_{2n}(\theta,q)$ *du développement en fonction de Mathieu, en intégrant sur l'angle et en utilisant des propriétés d'orthogonalité des fonctions de Mathieu, il vient un système infini d'équations linéaires :*

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p} \left\{ \beta\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \frac{\alpha\sqrt{2}}{c} \frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \right\} = 0$$

D'autre part on peut développer en série de Fourier le terme $\dfrac{1}{\sqrt{Cosh^2(\eta_0)-Cos^2(\theta)}}$ *. D'après une formule donnée par SATO : "Heat conduction in Infinite Elliptical cylinder during heating or cooling", ainsi qu'une formule donnée par N.N.Lebedev sur la décomposition de Fourier du terme de gradient, il vient :*

$$\frac{1}{(Cosh(\eta)-Cos(\theta))^{\nu}} = \sum_{j=0}^{j=\infty} G_j(\eta,\nu) Cos(j\theta) \qquad G_j(\eta,\nu) = 2^{\nu} e^{-(\nu+j)\eta} \frac{2}{(1+\partial_{j,0})} F\left(\nu, j+\nu, j+1, e^{-2\eta}\right) \frac{\Gamma(j+\nu)}{j!\Gamma(\nu)}$$

$$Cas\ \nu = \frac{1}{2} \Rightarrow G_j\left(\eta,\frac{1}{2}\right) = e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\eta} \frac{2\sqrt{2}}{(1+\partial_{j,0})} F\left(\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, j+1, e^{-2\eta}\right) \frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{j!\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$G_j\left(\eta,\frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{(1+\partial_{j,0})\pi} \sqrt{\pi} e^{-\left(j+\frac{1}{2}\right)\eta} F\left(\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, j+1, e^{-2\eta}\right) \frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{j!}$$

$$Voir \quad Lebedev \quad Q_p(Cosh(\eta)) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(p+\frac{3}{2}\right)} e^{-(p+1)\eta} F\left(p+1, \frac{1}{2}, p+\frac{3}{2}, e^{-2\eta}\right)$$

$$p = j-\frac{1}{2} \Rightarrow Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(j-\frac{1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(j-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)} e^{-\left(j-\frac{1}{2}+1\right)\eta} F\left(j-\frac{1}{2}+1, \frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}, e^{-2\eta}\right)$$

$$Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) = \sqrt{\pi} e^{-\left(j+\frac{1}{2}\right)\eta} F\left(\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, j+1, e^{-2\eta}\right) \frac{\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{l!}$$

$$G_j\left(\eta,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi(1+\partial_{j,0})} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{Cos(j\theta)}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1+\partial_{j,0})} Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \quad voir \quad Lebedev$$

$$\frac{1}{\sqrt{Cosh(\eta)-Cos(\theta)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta))}{(1+\partial_{j,0})} Cos(j\theta) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sum_{j=0}^{j=\infty} \frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})} Cos(2j\theta)$$

De plus la décomposition inverse de Fourier des fonctions de Mathieu donne les formules suivantes : $1 = 2\sum_{m=0}^{m=\infty} A_0^{(2m)}(q) ce_{2m}(\theta,q)$ $\qquad Cos(2j\theta) = \sum_{m=0}^{m=\infty}(1+\partial_{j,0})A_{2j}^{(2m)}(q) ce_{2m}(\theta,q)$

Il vient donc :

$$\frac{1}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}} = \sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(2\eta,\frac{1}{2}\right) Cos(2j\theta) = \sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(2\eta,\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{m=\infty} A_{2j}^{(2m)}(q)(1+\partial_{j,0}) ce_{2m}(\theta,q)$$

Reportant cette décomposition dans la condition aux limites , il vient :

$$c\beta \sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p} Je_{2p}(\eta_0,q)\, ce_{2p}(\theta,q) + \alpha\sqrt{2}\sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\left\{\sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(2\eta_0,\frac{1}{2}\right) Cos(2j\theta)\right\} ce_{2p}(\theta,q) = 0$$

$$c\beta \sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p} Je_{2p}(\eta_0,q)\, ce_{2p}(\theta,q) + \alpha\sqrt{2}\sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\left\{\sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(2\eta_0,\frac{1}{2}\right)\sum_{m=0}^{m=\infty} A_{2j}^{(2m)}(q)(1+\partial_{j,0}) ce_{2m}(\theta,q)\right\} ce_{2p}(\theta,q) = 0$$

En multipliant l'équation par chaque composante $ce_{2n}(\theta,q)$ *du développement en fonction de Mathieu, en intégrant sur l'angle et en utilisant des propriétés d'orthogonalité des fonctions de Mathieu :*

$$c\beta \sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p} Je_{2p}(\eta_0,q)\,\partial_{p,n} + \alpha\sqrt{2}\sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\left\{\sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(2\eta_0,\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2j\theta) ce_{2p}(\theta,q)\, ce_{2n}(\theta,q)\right\} = 0$$

$$c\beta \sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p} Je_{2p}(\eta_0,q)\,\partial_{p,n} + \alpha\sqrt{2}\sum_{p=0}^{p=\infty} B_{2p}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\left\{\sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(2\eta_0,\frac{1}{2}\right)(1+\partial_{j,0})\sum_{m=0}^{m=\infty} A_{2l}^{(2m)}(q)\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, ce_{2m}(\theta,q) ce_{2p}(\theta,q)\, ce_{2n}(\theta,q)\right\} = 0$$

$$Or \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2j\theta) ce_{2p}(\theta,q)\, ce_{2n}(\theta,q) = \Psi_{2p,2n}^{(j)}(q) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)(1+\delta_{l+j,0}) + A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)(1+\delta_{|l-j|,0})\right\}$$

Démontrons la formule :

$$Indice\ de\ Kronecker \quad \delta_{i,j} = 1 \quad si\ i = j$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2j\theta) ce_{2p}(\theta,q)\, ce_{2n}(\theta,q) = \Psi_{2p,2n}^{(j)}(q) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)(1+\delta_{l+j,0}) + A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)(1+\delta_{|l-j|,0})\right\}$$

Il suffit de substituer les développements de Fourier des fonctions de Mathieu et de considérer la linéarisation du produit des cosinus. Les seuls termes qui ne s'annulent pas dans l'intégration sont les termes constants , soit les termes qui s'annulent dans la linéarisation du produit des cosinus.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2j\theta) ce_{2p}(\theta,q)\, ce_{2n}(\theta,q) = \frac{1}{\pi}\sum_{l_1=0}^{l_1=\infty}\sum_{l_2=0}^{l_2=\infty} A_{2l_1}^{(2p)}(q) A_{2l_2}^{(2n)}(q)\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2j\theta) Cos(2l_1\theta) Cos(2l_2\theta)$$

$$Comme \quad Cos(2j\theta)Cos(2l_1\theta)Cos(2l_2\theta) = \frac{1}{4}\{Cos((2(j-l_1-l_2)\theta)) + Cos((2(j-l_1+l_2)\theta)) + Cos((2(j-l_1-l_2)\theta)) + Cos((2(j+l_1+l_2)\theta))\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, Cos(2j\theta) ce_{2p}(\theta,q)\, ce_{2n}(\theta,q) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)(1+\delta_{l+j,0}) + A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)(1+\delta_{|l-j|,0})\right\}$$

$$\Rightarrow \Psi_{2p,2n}^{(j)}(q) = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty} A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)(1+\delta_{l+j,0}) + A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)(1+\delta_{|l-j|,0})\right\}$$

Il vient donc un système d'équations linéaires, résultat obtenu par K.Sato , dans un article de 2006 « Heat conduction in Infinite Elliptical cylinder during heating or cooling ». En théorie pour avoir une solution non triviale (nulle) des coefficient B_{2n} , il faut que le déterminant infini soit nul :

$$\text{Indice de Kronecker} \quad \delta_{i,j}=1 \quad si\ i=j \quad G_l\left(\eta,\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\left(1+\partial_{l,0}\right)}Q_{l-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)$$

$$\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p}\left\{\beta\, c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\sum_{j=0}^{j=\infty}G_j\left(2\eta_0,\frac{1}{2}\right)\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p}\left\{\beta\, c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p}+\frac{4\alpha}{\pi}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}\left(Cosh(2\eta_0)\right)}{\left(1+\partial_{j,0}\right)}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\right\}=0 \qquad et \qquad h=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p}\left\{hc\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p}+\frac{4}{\pi}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}\left(Cosh(2\eta_0)\right)}{\left(1+\partial_{j,0}\right)}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p}\left\{hc\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p}+\sqrt{2}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\sum_{j=0}^{j=\infty}G_j\left(2\eta_0,\frac{1}{2}\right)\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\right\}=0 \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{p=\infty}E_{2n,2p}B_{2p}=0$$

$$\begin{cases} E_{2n,2p}=\beta c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p}+\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \\ E_{2n,2p}=\beta\, c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p}+\dfrac{4\alpha}{\pi}\dfrac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}\left(Cosh(2\eta_0)\right)}{\left(1+\partial_{j,0}\right)}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta=\begin{vmatrix} E_{0,0} & E_{0,2} & E_{0,4} & \dots & \dots \\ E_{2,0} & E_{2,2} & E_{2,4} & \dots & \dots \\ E_{4,0} & E_{4,2} & E_{4,4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=0$$

L'équation d'annulation du déterminant est également appelée équation déterminantale. Je vais étudier les divers cas de simplification pour la résolution de cette dernière, puis le schéma numérique de résolution de cette dernière.

Cas limites permettant la simplification de l'équation déterminantale

Condition homogène de Dirichlet

Pour une condition homogène de type Dirichlet le paramètre α est nulle, seule les termes diagonaux subsiste, et la condition de nullité du déterminant se réduit à celle des termes diagonaux, soit : $Je_{2n}(\eta_0, q) = 0$ *. Le spectre des valeurs du paramètre q est donc celui respectant cette équation transcendantale.*

Condition homogène de Neumann

Lorsqu'il s'agit d'une conditions aux limites de Neumann, alors c'est le paramètre β qui est nulle, conduisant à l'équation déterminantale:

$$E_{2n,2p} = \frac{4\alpha}{\pi}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi^{(j)}_{2p,2n}(q) = \frac{4\alpha}{\pi}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}C_{2n,2p}$$

$$C_{2n,2p} = \sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi^{(j)}_{2p,2n}(q) \Rightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \tilde{\Delta} = \left\{\prod_{l=0}^{+\infty}\frac{dJe_{2l}(\eta_0,q)}{d\eta}\right\}\begin{vmatrix} C_{0,0} & C_{0,2} & C_{0,4} & \dots & \dots \\ C_{2,0} & C_{2,2} & C_{2,4} & \dots & \dots \\ C_{4,0} & C_{4,2} & C_{4,4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{dJe_{2l}(\eta_0,q)}{d\eta} = 0$$

Ce qui est la condition de nullité de la dérivée première des fonctions radiales de Mathieu sur le bord de l'ellipse. Le spectre des valeurs du paramètre q est donc celui respectant cette équation transcendantale.

Dégénérescence vers le cercle

Lorsque l'ellipse dégénère en cercle, les formules de passage ont lieu :

$$Ellipse\ grand\ axe\ a\ ,\ petit\ axe\ b \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \eta_0 = ArcCosh\left(\frac{a}{c}\right)$$

$$a \to b \Rightarrow c \to 0 \quad et \quad \eta_0 \to \infty \quad et \quad \begin{cases} cCosh(\eta) \to r \\ cSinh(\eta) \to r \end{cases} \Rightarrow cCosh(\eta_0) \to r_0 = a = b$$

$$\frac{ce^{\eta}}{2} \to r \Rightarrow \frac{c^2e^{2\eta}}{4} \to r^2 \quad \frac{dr}{d\eta} = r \qquad qe^{2\eta} \to \nu^2 r^2 \Rightarrow q \to \frac{c^2\nu^2}{4} \Rightarrow \frac{2\sqrt{q}}{c} \to \nu$$

$$\begin{cases} ce_0(\vartheta,q) \to \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ce_{2n}(\vartheta,q) \to Cos(2n\vartheta) \\ Je_{2n}(\eta,q) \to p'_{2n}\,J_{2n}(\nu r) \quad p'_{2n} \quad se\,neutralise\,dans\,le\,développement\,en\,série \end{cases}$$

Si bien que l'équation déterminantale se simplifie grandement :

$$E_{2n,2p} = \beta c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \frac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}}$$

$$Je_{2p}(\eta_0,q) \approx p'_{2n} J_{2n}(\nu r_0) \quad \frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta} = \frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{dr}\frac{dr}{d\eta} \approx p'_{2n}\frac{dJ_{2n}(\nu r)}{dr}r\Big|_{r=r_0} \quad \frac{r_0}{e^{\eta_0}} \approx \frac{c}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)}} \approx \frac{\sqrt{2}}{e^{\eta_0}}$$

$$\eta_0 \to \infty \Rightarrow E_{2n,2p} \approx \left\{\beta c\, Je_{2p}(\eta_0,q) + \alpha\sqrt{2}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\frac{1}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)}}\right\}\delta_{n,p} \approx p'_{2n}\left\{\beta c\, J_{2n}(\nu r_0) + 2\alpha\frac{dJ_{2n}(\nu r)}{dr}\Big|_{r=r_0}\frac{r_0}{e^{\eta_0}}\right\}\delta_{n,p}$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p} \approx p'_{2n}\, c\left\{\beta J_{2n}(\nu r_0) + \alpha\frac{dJ_{2n}(\nu r)}{dr}\Big|_{r=r_0}\right\}\delta_{n,p} \approx p'_{2n}\, c\{\beta J_{2n}(\nu b) + \alpha\nu J_{2n}'(\nu b)\}\delta_{n,p}$$

$$Or \quad J_{2n}'(x) = \frac{2n}{x}J_{2n}(x) - J_{2n+1}(x) \quad J_{2n}'(\nu b) = \frac{2n}{\nu b}J_{2n}(\nu b) - J_{2n+1}(\nu b)$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p} \approx p'_{2n}\, c\left\{\beta J_{2n}(\nu b) + \left(\frac{2\alpha n}{b}J_{2n}(\nu b) - \alpha\nu J_{2n+1}(\nu b)\right)\right\}\delta_{n,p} \approx p'_{2n}\, c\left\{\left(\beta + \alpha\frac{2n}{b}\right)J_{2n}(\nu b) - \alpha\nu J_{2n+1}(\nu b)\right\}\delta_{n,p}$$

Dans ces conditions l'équation déterminantale se réduit à l'équation transcendantale suivante :

$$\left(\beta + \alpha\frac{2n}{b}\right)J_{2n}(\nu b) - \alpha\nu J_{2n+1}(\nu b) \Leftrightarrow (\beta b + \alpha 2n)J_{2n}(\nu b) - \alpha\nu b J_{2n+1}(\nu b)$$

$$\Leftrightarrow (hb + 2n)J_{2n}(\nu b) - \nu b J_{2n+1}(\nu b) \quad n = 0,1,2,\cdots \quad avec \quad h = \frac{\beta}{\alpha}$$

<u>Dégénérescence vers une bande centrée sur l'axe des abscisses de largeur 2b</u>

Il s'agit du cas a/b->∞. Les paramètres du problème aux limites prennent la forme suivante

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \eta_0 = ArcCosh\left(\frac{a}{c}\right) \approx ArcCosh(1) \Rightarrow \eta_0 \approx 0 \quad b = cSinh(\eta_0) \approx c\eta_0 \approx a\eta_0 \Rightarrow \eta_0 \approx \frac{b}{a} \to 0$$

Dans un problème cartésien, la condition aux limites radiales se transforme en une condition aux limites angulaires pour les valeurs ϑ=π/2 et ϑ=-π/2 et , soit en y=+b et y=-b.

L'équation de Laplace est plus simple à résoudre en coordonnées cartésiennes, soit :

$$\frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2} = -\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(y,t)}{\partial t} \Rightarrow T(y,t) = \sum_{m=1}^{m=+\infty} B_m Cos(\nu_m y)\, e^{-\delta\nu_m^2 t} \quad h = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\beta T(y,t) + \alpha\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\Big|_{y=\pm b} \Leftrightarrow hT(y,t) + \frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\Big|_{y=\pm b} \Rightarrow \nu b Tan(\nu b) = hb \Leftrightarrow \alpha\nu b Tan(\nu b) = \beta b$$

Tout se passe comme si l'ensemble des valeurs propres pour un même m quelque soit l'indice n tendent toutes vers la même valeur. Le seul indice relevant dans la solution est ici l'indice m.

Voyons si l'on peut entrevoir dans l'équation déterminantale cette convergence des valeurs propres d'un même indice m :

$$E_{2n,2p} = \beta c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \frac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\frac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \approx \beta c\, Je_{2p}\left(\frac{b}{a},q\right)\delta_{n,p} + \frac{\alpha}{\pi}\frac{dJe_{2p}\left(\frac{b}{a},q\right)}{d\eta}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{|Sin(\theta)|}$$

$$\approx \beta c\, Je_{2p}\left(\frac{b}{a},q\right)\delta_{n,p} + \frac{2\alpha}{\pi}\frac{dJe_{2p}\left(\frac{b}{a},q\right)}{d\eta}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta \frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{Sin(\theta)}$$

Le spectre des valeurs du paramètre q solution de l'équation déterminantale se déplace vers des valeurs très importantes en suivant celle du facteur d'échelle c (le grand axe de l'ellipse devenant infini). Si bien que l'on peut considérer que les fonctions angulaires se rapprochent de l'approximation asymptotique de Sips (valable entre 0 et π). Dans ce dernier cas les valeurs significatives des fonctions angulaires sont concentrées autour de la valeur π/2, là où le dénominateur Sin(ϑ) ne varie que très peu, autour de 1. On peut donc sortir Sin(ϑ) du dénominateur. D'autre part on peut utiliser pour les fonctions de Mathieu radiales l'expansion au premier terme de Goldstein (voir A.Erdelyi H.Bateman HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS_VOL_III, formule 7 section 16.7 page 127). Il vient selon ces deux aspects :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta \frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{Sin(\theta)} \approx \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q) \approx \frac{\pi}{2}\delta_{n,p}$$

$$q >> 0 \quad Je_n(x,q) \approx \frac{A_n}{\sqrt{Cosh(x)}} Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)$$

$$\Rightarrow q >> 0 \quad et \quad x \approx 0 \quad \begin{cases} Je_n(x,q) \approx \frac{A_n}{\sqrt{Cosh(x)}} Cos\left(2x\sqrt{q} - x\frac{(2n+1)}{2}\right) \approx A_n Cos\left(2x\sqrt{q}\right) \\ Je_n'(x,q) \approx -A_n 2\sqrt{q} Sin\left(2x\sqrt{q}\right) \end{cases}$$

$$Je_{2p}\left(\frac{b}{a},q\right) \approx A_{2p} Cos\left(2\frac{b}{a}\sqrt{q}\right) \qquad \frac{dJe_{2p}\left(\frac{b}{a},q\right)}{d\eta} \approx -A_{2p} 2\sqrt{q} Sin\left(2\frac{b}{a}\sqrt{q}\right) \quad et \quad A_{2p} = A_{2p}(q) \neq 0 \quad \forall q$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p} \approx A_{2p}\delta_{n,p}\left\{\beta c\, Cos\left(2\frac{b}{a}\sqrt{q}\right) - \alpha 2\sqrt{q} Sin\left(2\frac{b}{a}\sqrt{q}\right)\right\} \quad Posons \quad q = \frac{v^2c^2}{4} \Rightarrow 2\sqrt{q} = vc \quad et \quad \frac{c}{a} \approx 1$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p} \approx A_{2p}\delta_{n,p} c\left\{\beta\, Cos\left(vc\frac{b}{a}\right) - \alpha v\, Sin\left(vc\frac{b}{a}\right)\right\} \approx A_{2p}\delta_{n,p} c\{\beta\, Cos(vb) - \alpha v\, Sin(vb)\}$$

Cette équation déterminantale approchée donne des coefficients du déterminant uniquement diagonaux, et dont les valeurs ne dépendent plus de l'indice n à part la constante de proportionnalité qui ne s'annule jamais. Il reste donc un spectre de valeurs propres uniquement déterminé par la résolution d'une simple équation transcendantale dont le spectre discret est indicé par les valeurs m : $\beta\, Cos(vb) = \alpha v\, Sin(vb) \Leftrightarrow \beta b = \alpha v b Tan(vb) \Leftrightarrow hb = vbTan(vb)$*. Il est heureux par ce biais d'effectivement retrouver l'équation transcendantale de la résolution du problème cartésien.*

<u>*Scénario de résolution de l'équation déterminantale*</u>

En pratique il suffit de résoudre l'équation pour une dimension finie N du déterminant. Le principe de résolution consiste à examiner la convergence des racines successivement obtenues par l'agrandissement du déterminant fini en commençant par une ligne et une colonne et en agrandissant successivement le déterminant du coin supérieur gauche d'une ligne et d'une colonne. On détermine numériquement les racines à l'étape 0, puis à l'étape 1, ainsi de suite, et l'on constate que les racines successives convergent rapidement vers une solution. Pour déterminer l'appartenance du spectre de valeurs propres aux indices n et m, il suffit de partir du déterminant simplifié à la diagonale principale de la matrice qui devient alors une simple équation transcendantale pour chaque valeur de n et qui par résolution numérique donne les valeurs approximatives autour desquelles la convergence s'effectue et par retour permet d'identifier la valeur de n et m dans la résolution approchée de l'équation déterminantale. Voici les étapes simplifiées du processus de détermination successive des racines approchées de l'équation déterminantale :

$$E_{2n,2p} = \beta\, c\, Je_{2p}(\eta_0, q)\delta_{n,p} + \frac{4\alpha}{\pi}\frac{dJe_{2p}(\eta_0, q)}{d\eta}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} E_{0,0} & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & E_{2,2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & E_{4,4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} E_{0,0} = 0 \to q_{0,m}^{(1)} \\ E_{2,2} = 0 \to q_{2,m}^{(1)} \\ E_{4,4} = 0 \to q_{4,m}^{(1)} \\ \dots \end{cases}$$

$$\Delta^{(1)} = E_{0,0} = 0 \to q_{0,m}^{(1)} \to \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} E_{0,0} & E_{0,2} \\ E_{2,0} & E_{2,2} \end{vmatrix} = 0 \to \begin{cases} q_{0,m}^{(2)} \\ q_{2,m}^{(1)} \end{cases} \to \Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} E_{0,0} & E_{0,2} & E_{0,4} \\ E_{2,0} & E_{2,2} & E_{2,4} \\ E_{4,0} & E_{4,2} & E_{4,4} \end{vmatrix} \to \begin{cases} q_{0,m}^{(3)} \\ q_{2,m}^{(3)} \\ q_{4,m}^{(3)} \end{cases} \quad \dots$$

Il existe un choix du paramètre pour représenter les valeurs propres du problème aux limites lié au passage à la limite du cercle. On sait que dans ce cas limite on peut poser $q=c^2v^2/4=b^2v^2/4$ *et proposer cette paramétrisation. Dans le cas du cercle vb possède un spectre discret de valeurs propres indépendantes du rayon du cercle b. Selon le modèle géométrique d'une ellipse de grand axe a et de petit axe b, nous avons donc :*

$$Ellipse\ grand\ axe\ a\ ,\ petit\ axe\ b \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} \quad \eta_0 = ArcCosh\left(\frac{a}{c}\right) = ArcCosh\left(\frac{a}{b}\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$posons \quad q = \frac{c^2v^2}{4} = \frac{(vb)^2\gamma^2}{4} \Rightarrow E_{2p,2n} = \beta\, c\, Je_{2p}\left(\eta_0, \frac{(vb)^2\gamma^2}{4}\right)\delta_{n,p} + \frac{4\alpha}{\pi}\frac{dJe_{2p}\left(\eta_0, \frac{(vb)^2\gamma^2}{4}\right)}{d\eta}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}\left(\frac{(vb)^2\gamma^2}{4}\right)$$

Il apparaît donc également que vb, solution de l'équation déterminantale, ne dépend a priori que du rapport du grand et petit axe a/b. C'est la raison pour laquelle on représente les valeurs propres du problème selon ce paramètre vb.

Tableaux de valeurs propres vb pour hb=βb/α=1 :

N°	2n=0,2,4,6,...	m=1,2,...	a/b=2->vb	a/b=4->vb	a/b=8->vb
1	0	1	1.0614375916629355	0.9631692746080209	0.9115177815284944
2	2	1	2.1765860814035194	1.4556915113742215	1.1384978718687362
3	4	1	3.526824506209106	2.0601279748962122	1.398939131408394`
4	0	2	3.659785081706354	3.5434600665172162	3.4850833575170523
5	2	2	4.757461082066746	4.055925240852935	3.7333768812911066
6	6	1	4.93513094491929	2.735664238929749	1.6882108861974559
7	4	2	5.970119006289432	4.601937448844579	3.990829494387232
8	8	1	6.344393297570017	3.4486785774279145	2.001590864560471
9	0	3	6.6859096039395505	6.559804668426512	
10	6	2	7.27343139579581	5.177188803970152	4.256918021369195
11	2	3	7.772489201735216	7.0732270120416425	
12	8	2	8.647609948565435	5.777638196704501	
13	4	3	8.92471184682803	7.605005973072139	
14	0	4	9.782851630619058		
15	6	3	10.132440779378896	8.153896879670327	
16	2	4	10.860436780108856		
17	8	3	11.38670172108307	8.718673688020012	
18	4	4	11.98458952203606		
19	0	5	13.00477063054095		
20	6	4	13.150316899677398		
21	2	5	13.972790020980733		
22	8	4	14.353007929602745		
23	4	5	15.080522213834954		

Remarques : Les cases vides correspondent à des valeurs que je n'ai pu déterminer de manière aussi fiable que je l'aurais voulu du fait de la faiblesse de l'implémentation des fonctions de Mathieu avec des coefficient q très grand. Ce que l'on constate c'est que toutes les valeurs propres pour une même valeur de m et différente valeur de n convergent vers une seule valeur propre solution de l'équation hb=βb/α=vbTan(vb) lorsque a->∞, équation transcendantale des valeurs propres pour la bande centrée de largeur 2b.

Problème aux limites avec conditions initiales pour l' équation de la chaleur (diffusion) – p

Tableaux des 6 premières valeurs propres vb avec les valeurs indicielles, pour a/b=2 et diverses valeurs de hb :

hb	2n=0, m=1	2n=2, m=1	2n=4, m=1	2n=0, m=2	2n=2, m=2	2n=6, m=1
hb=0.	0	1.7095156558218398	3.2090088239962555	3.3801236479753327	4.524073481004619	4.671808465838564
hb=0.01	0.12396114313773413	1.7159312696334272	3.2129178017846596	3.383203203613018	4.526554764798307	4.674857838451709
hb=0.02	0.1750049907050247	1.722298545788992	3.216808767559644	3.3862777524403422	4.529033734952617	4.67789641273172
hb=0.04	0.24664327031027383	1.734890419067115	3.2245371537140968	3.3924116922777663	4.533984635158171	4.68394134697117
hb=0.06	0.3010400313790831	1.7472958244497503	3.2321949519865147	3.398525198746437	4.5389259845423435	4.689943629349928
hb=0.08	0.34642443397783484	1.7595191283881748	3.2397831133766175	3.404618012678712	4.543857588225941	4.69590361962926
hb=0.1	0.3859970603100375	1.7715645259923238	3.2473025707676837	3.4106898843681925	4.548779253706051	4.701821676368378
hb=0.2	0.5367671615119135	1.829258970999618	3.283900730175128	3.440727016731084	4.5732319553260465	4.7307954041093225`
hb=0.4	0.7346900310539414	1.933325268046294	3.352433288673061	3.4991125933210907	4.621289465312495	4.785799179666197
hb=0.6	0.8720244522264391	2.024565942230672	3.41536142980518	3.5551284799729475	4.668089134981005	4.837155692972592
hb=0.8	0.9771114357020261	2.105103197558432	3.473314975533252	3.608693971878094	4.71350846881258	4.885175964585048
hb=1	1.0614375004808592	2.1765854827583313	3.526823804176582	3.6597850807870653	4.757458538455858	4.930144265476918
hb=2	1.322012350328366	2.4369781573010356	3.741469039917181	3.879732394343605	4.9539568373849825	5.1173761555093655`
hb=4	1.5430034282353418	2.703203382125548	4.002506365191913	4.179277056919814	5.241024340229784	5.365453241256837
hb=6	1.6410222383763635	2.8320084887494783	4.14721846742775	4.3626432293051876	5.4276620434585094	5.5170269198283135`
hb=8	1.6960373539046503	2.906108339609809	4.235835183482085	4.482370840898458	5.553729310929383	5.615825569445763
hb=10	1.7311583534492736	2.953793449489114	4.294639853285733	4.56536553762584	5.642890609107941	5.683892659906318
hb=20	1.8064208593844797	3.056184700978587	4.424244308738809	4.759243609696683	5.839720474234388	5.855971218961544
hb=40	1.8466345485204323	3.1105833852151092	4.493998340416785	4.870036509382444	5.925903031710367	5.979653535499633
hb=60	1.860424460573876	3.1291294655896706	4.517770266868783	4.908788354628006	5.955390935954764	6.02309841431286
hb=80	1.867391355655415	3.1384730807766617	4.529730293302926	4.928465677156847	5.970227607840084	6.045173226462595
hb=100	1.87159443431495	3.1441008483344435	4.536926717772454	4.940362003001775	6.058520792593134	7.256737429593467
hb=∞	1.8885779313888178	3.1667651666100785	4.565836860628533	4.988560078306825	6.014955297104337	6.112586311726921

Tableaux des 6 premières valeurs propres vb avec les valeurs indicielles, pour a/b=4 et diverses valeurs de hb :

hb	2n=0, m=1	2n=2, m=1	2n=4, m=1	2n=0, m=2	2n=2, m=2	2n=6, m=1
h=0.	0	0.8675321722142821	1.6486564507364387	2.424722719572541	3.7941672615275874	4.359061658287793
h=0.01	0.11654576423766297	0.8777415065673919	1.6542480002323636	2.428119760093588	3.2655961983974753	3.7970435918121286
h=0.02	0.16440490664126206	0.8877882702177196	1.659800448739368	2.4315050428845195	3.268719897627591	3.79991519692467
h=0.04	0.23134506670179664	0.9074135269637504	1.6707896607308301	2.4382405776790708	3.2749491861670346	3.805644132037508
h=0.06	0.2819470714772192	0.9264442772114905	1.6816272401517263	2.44492980307615	3.281154160414767	3.811353872315048
h=0.08	0.32398816106881106	0.9449132197448036	1.6923162144729578	2.451573189104333	3.287334627456372	3.8170442305542713
h=0.1	0.36050061087599167	0.9628499561104316	1.7028594932483034	2.4581711967109463	3.29349040377229	3.8227150267905383
h=0.2	0.49824982995953027	1.0454189020227285	1.7534849367948415	2.4904960575079853	3.8507697716660925	4.411093301832406
h=0.4	0.675763248606363	1.182250862524781	1.8452176841405996	2.551981750617118	3.382766006297688	3.905327976085876
h=0.6	0.7971153191928604	1.2915185888394296	1.9258778218697936	2.609538321376381	3.4389944322016333	3.9577354339318096
h=0.8	0.889341970293095	1.380985188266182	1.9970427766024808	2.6634403490389795	3.492551791989302	4.007938457824291
h=1	0.9631664517569102	1.4556520332275242	2.0600164243384307	2.7138887116645893	3.5434600665172216	4.055925240814119
h=2	1.191952169081384	1.6982891048823865	2.285881416338724	2.9185842408387725	3.760990751590868	4.264043889730907
h=4	1.3890969970261315	1.9152648870610838	2.509083938743019	3.1485795999924227	4.0541431392269365	4.552668119824215
h=6	1.4781023263125366	2.014724430601757	2.6152967498256223	3.260761055408883	5.260810099741742	5.8152482575228595
h=8	1.5285888968094026	2.071457659912808	2.6765083428250716	3.3255053258408958	4.85192435062544	5.381617909915199
h=10	1.5610395029948556	2.1080191958411056	2.71612378656455	3.3674507157669744	4.429436978173164	4.9351824772031
h=20	1.631208070889951	2.187250697100563	2.8022675148846217	3.458865481290904	4.617996350218452	5.131748247839552
h=40	1.6690769385356639	2.2300552469985164	2.848891554216682	3.508490544370961	4.726101407518816	5.245238044086299
h=60	1.6821267482651088	2.2448042934916024	2.8649583534889675	3.525616281809061	4.764003142973841	5.285101131601374
h=80	1.6887324750253216	2.2522689277810573	2.873089037454735	3.534287385477311	4.783269562897038	5.305372119849999
h=100	1.6927218430707296	2.256776481789009	2.8779983357255894	3.5395243997694115	4.794924641256559	5.864242957169378
h=∞	1.7088741917868138	2.275021657740813	2.897864673538085	3.5607270320041855	4.842203939983065	5.3673891554890965

Tableaux des 6 premières valeurs propres vb avec les valeurs indicielles, pour a/b=8 et diverses valeurs de hb :

hb	2n=0, m=1	2n=2, m=1	2n=4, m=1	2n=0, m=2	2n=2, m=2	2n=6, m=1
h=0.	0	0.4353099284237034	0.8293132592494032	1.2215982682024573	3.202953760091763	3.4606439980645067
h=0.01	0.1135581742951614	0.45365286657608644	0.8392329168603351	1.2265748619814427	3.2061057086280793	3.463670664402132
h=0.02	0.15984080962433428	0.47119473478514157	0.8490051373663432	1.231546747568422	3.209251383537073	3.466691711581224
h=0.04	0.22403905222123993	0.5041648045973489	0.8681220271912385	1.2414794460855527	3.2155238144300755	3.4727168534958506
h=0.06	0.27211299868681293	0.5346942466424448	0.8866912942196848	1.2514026675823176	3.2217708628216974	3.478719239185808
h=0.08	0.3117660635858504	0.5631352141697668	0.9047373305733059	1.2613230317877209	3.227992348441694	3.484698692428399
h=0.1	0.34601716518227993	0.5897607153778134	0.9222821327019275	1.2712474608363884	3.234188100505155	3.4906550452479537
h=0.2	0.4742289264969534	0.7021095208452274	1.003140939378137	1.3211891813235226	3.264775519597486	3.5200849818452418
h=0.4	0.6393783418216287	0.8628507951152768	1.1364525771822722	1.425214955041534	3.3239470012778485	3.5771375155833005
h=0.6	0.7534612182167594	0.9776056091489412	1.241521803877924	1.5310075670871213	3.380390415913	3.6317156068838115
h=0.8	0.8409849213516694	1.0664451356558893	1.3267476801725961	1.6216728089886894	3.4340914445380504	3.6837903849012243
h=1	0.911516858367429	1.13844882825436	1.3975840977707135	1.694232944630677	3.4850833565786368	3.733376880175308
h=2	1.132084283427668	1.3663565026841702	1.6268280781492213	1.9191353271410443	3.7024419666522057	3.9463267586112902
h=4	1.323609700514501	1.5679006717344417	1.8336399778068604	2.1230716585584397	3.994236393648156	4.486295932690942
h=6	1.41035597371574	1.6601480779714821	1.929741133879298	2.2195365655393515	4.171339148559202	4.665031430116321
h=8	1.4596347595979409	1.7127510943715871	1.9848916198803421	2.275482294024042	4.2866690135730465	4.531311452684687
h=10	1.4913397047552166	1.7466527745544365	2.02054596307005	2.3118901532590628	4.366574125517544	4.612574115724361
h=20	1.5599880351286217	1.820162040285307	2.098082121323066	2.391719581159081	4.553473324309091	4.803470681898828
h=40	1.597095475823224	1.8599269866331638	2.140112194219916	2.4353574713695068	4.660674437041532	4.913324813662029
h=60	1.6098935458901376	1.873642038567346	2.1546162266852735	2.4504726525599385	4.698277233863481	4.951891855611317
h=80	1.616374032339283	1.880586501401466	2.16196107166009	2.458137554593726	4.717396252039671	4.971504722343442
h=100	1.6202884918023601	1.8847810466306827	2.16639765840204	2.462770841399109	4.728963784209013	4.983371775940603
h=∞	1.6361432753622749	1.9017684042222298	2.184366092660178	2.481561221387299	4.775901651997207	5.0315266890349495

Valeurs approchées asymptotiques (q grand) des racines de l'équation déterminantale

En revenant à l'équation déterminantale de départ et en supposant que l'on recherche les valeurs asymptotiques du paramètre q (ou v), on peut utiliser le même procédé de calcul avec les approximations de Goldstein, que l'on peut également affiner en argument des fonctions sinusoïdales. C'est un calcul assez similaire (approximation de l'intégrale différente) qui conduit à considérer des matrices principalement diagonales :

$$E_{2n,2p} = \beta c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \frac{\alpha\sqrt{2}}{\pi} Je_{2p}'(\eta_0,q)\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \quad Lorsque \quad q>>0 \quad valeur\ significative\ ce_{2p}(\theta,q)\ pour\ \theta \approx \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta \frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \approx \frac{2}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\theta \frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)+1}} \approx \frac{\delta_{n,p}}{\sqrt{2}Cosh(\eta_1)} \Rightarrow E_{2n,2p} \approx \left(\beta c Je_{2p}(\eta_0,q) + \frac{\alpha Je_{2p}'(\eta_0,q)}{Cosh(\eta_1)}\right)\delta_{n,p}$$

$$q>>0 \quad \begin{cases} Je_n(x,q) \approx \dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}} Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \\ Je_n'(x,q) \approx -ce_n(0,q)2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right) \end{cases} \quad Posons \quad q = \frac{v^2c^2}{4} \Rightarrow 2\sqrt{q} = vc$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p} \approx \frac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(\eta_0)}}\delta_{n,p} c\left(\beta Cos\left(vcSinh(\eta_0) - (4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)\right) - \alpha v\, Sin\left(vcSinh(\eta_0) - (4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)\right)\right)$$

$$Posons \quad \gamma(v,\eta) = vcSinh(\eta) - (4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) \Rightarrow Det([E_{2n,2p}]) \Leftrightarrow \beta Cos(\gamma(v,\eta_0)) - \alpha v\, Sin(\gamma(v,\eta_0)) = 0$$

Les valeurs approchées des grandes racines de l'équation déterminantale sont donc celles de l'équation transcendantale plus simple : $\beta = \alpha v\, Tan\left(vcSinh(\eta_0) - (4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)\right)$.

On retrouve les valeurs pour les deux cas particuliers de Dirichlet (α=0, β=1) et Neumann (α=1, β=0).

<u>Expression de la solution générale du problème aux limites de Robin homogène sur le cylindre elliptique plein</u>

Sachant que sur ce type de problème aux limites (réchauffement, refroidissement), il convient d'utiliser la propriété d'orthogonalité bidimensionnelles du produit des fonctions propres radiales et angulaires de Mathieu (voir également le problème aux limites de l'équation de Laplace sur un cylindre à section elliptique), alors la forme de la solution est la suivante :

$$(1)\quad \textit{Réchauffement}\quad C.L.\quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Bigg|_{\eta=\eta_0}=\beta\, T_0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=0$$

$$\textit{Posons}\quad (\nu_{2n,m})^2=\frac{4q_{2n,m}}{c^2}\qquad B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\,(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\,(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))(Je_{2n}(\eta,q_{2n,m}))^2(ce_{2n}(\theta,q_{2n,m}))^2}$$

$$(1)\Rightarrow \frac{T_0-T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})e^{-\delta\frac{4q_{2n,m}}{c^2}t}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

$$(2)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Bigg|_{\eta=\eta_0}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0$$

$$(2)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

$$(3)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Bigg|_{\eta=\eta_0}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0(\eta,\theta)\quad tq\quad \begin{cases}T_0(\eta,-\theta)=T_0(\eta,\theta)\\ T_0(\eta,\pi-\theta)=T_0(\eta,\theta)\end{cases}$$

$$B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\,(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))T_0(\eta,\theta)Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\,(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))(Je_{2n}(\eta,q_{2n,m}))^2(ce_{2n}(\theta,q_{2n,m}))^2}$$

$$(3)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

Etude d'un problème transitoire de diffusion en coordonnées elliptiques avec conditions aux limites mixtes de Robin : cylindre de longueur infinie de section elliptique soumis à une condition initiale de température quelconque, et une condition aux limites de Robin homogènes de température , problème de refroidissement.

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,t)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,t)}{\partial\theta^2}\right)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial t}=0$$

$$C.L.\quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial\eta}+\beta\, T(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_0}=0 \qquad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=f(\eta,\theta)$$

Dans le problème précédent nous nous sommes volontairement restreint à des conditions initiales de géométrie Y+X+ (par exemple une fonction T0 constante), ce qui permet de ne développer le spectre de valeurs propres que selon les fonctions angulaires de Mathieu d'ordre pair. On sait que toute fonction initiale peut se développer selon ses quatre composantes Y+X+, Y+X-,Y-X+ et Y-X- :

$$f(\eta,\theta)=f_{Y+,X+}(\eta,\theta)+f_{Y+,X-}(\eta,\theta)+f_{Y-,X+}(\eta,\theta)+f_{Y-,X-}(\eta,\theta),\quad sachant\ que\quad f(\eta,\theta)=f(\eta,2\pi+\theta)$$

$$f_{Y+,X+}(\eta,\theta)=\frac{f(\eta,\theta)+f(\eta,\pi-\theta)+f(\eta,-\theta)+f(\eta,\theta-\pi)}{4}\qquad \begin{cases} f_{Y+,X+}(\eta,\pi-\theta)=f_{Y+,X+}(\eta,\theta)\\ f_{Y+,X+}(\eta,-\theta)=f_{Y+,X+}(\eta,\theta)\end{cases}$$

$$f_{Y+,X-}(\eta,\theta)=\frac{f(\eta,\theta)+f(\eta,\pi-\theta)-f(\eta,-\theta)-f(\eta,\theta-\pi)}{4}\qquad \begin{cases} f_{Y+,X-}(\eta,\pi-\theta)=f_{Y+,X-}(\eta,\theta)\\ f_{Y+,X-}(\eta,-\theta)=-f_{Y+,X-}(\eta,\theta)\end{cases}$$

$$f_{Y-,X+}(\eta,\theta)=\frac{f(\eta,\theta)-f(\eta,\pi-\theta)+f(\eta,-\theta)-f(\eta,\theta-\pi)}{4}\qquad \begin{cases} f_{Y-,X+}(\eta,\pi-\theta)=-f_{Y-,X+}(\eta,\theta)\\ f_{Y-,X+}(\eta,-\theta)=f_{Y-,X+}(\eta,\theta)\end{cases}$$

$$f_{Y-,X-}(\eta,\theta)=\frac{f(\eta,\theta)-f(\eta,\pi-\theta)-f(\eta,-\theta)+f(\eta,\theta-\pi)}{4}\qquad \begin{cases} f_{Y-,X-}(\eta,\pi-\theta)=-f_{Y-,X-}(\eta,\theta)\\ f_{Y-,X-}(\eta,-\theta)=-f_{Y-,X-}(\eta,\theta)\end{cases}$$

Compte tenu de la condition de régularité du gradient sur la ligne inter-focale la forme de la solution sera recherchée comme suit :

$$T(\eta,\theta,t)=\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{\{n,m\}\in V_{Y+X+}}A_{2n,m}^{Y+X+}Je_{2n}\left(\eta,q_{2n,m}^{Y+X+}\right)ce_{2n}\left(\theta,q_{2n,m}^{Y+X+}\right)e^{-\delta\frac{4q_{2n,m}^{Y+X+}}{c^2}t}+\\ \displaystyle+\sum_{\{n,m\}\in V_{Y-X+}}A_{2n+1,m}^{Y-X+}Je_{2n+1}\left(\eta,q_{2n+1,m}^{Y-X+}\right)ce_{2n+1}\left(\theta,q_{2n+1,m}^{Y-X+}\right)e^{-\delta\frac{4q_{2n+1,m}^{Y-X+}}{c^2}t}+\\ \displaystyle+\sum_{\{n,m\}\in V_{Y+X-}}A_{2n+1,m}^{Y+X-}Jo_{2n+1}\left(\eta,q_{2n+1,m}^{Y+X-}\right)se_{2n+1}\left(\theta,q_{2n+1,m}^{Y+X-}\right)e^{-\delta\frac{4q_{2n+1,m}^{Y+X+}}{c^2}t}+\\ \displaystyle\sum_{\{n,m\}\in V_{Y-X-}}A_{2n+2,m}^{Y-X-}Jo_{2n+2}\left(\eta,q_{2n+2,m}^{Y-X-}\right)se_{2n+2}\left(\theta,q_{2n+2,m}^{Y-X-}\right)e^{-\delta\frac{4q_{2n+2,m}^{Y-X-}}{c^2}t}\end{array}\right\}$$

Les ensembles d'indices $V_{Y\pm X\pm}$ désigne les indices des valeurs propres obtenues lorsque l'on décompose chaque problème aux limites selon sa géométrie. Le problème Y+X+ a été étudié dans le point précédent, nous allons illustrer simplement les valeurs propres obtenues pour les trois autres symétrie compte tenu du fait que l'on peut calculer les intégrales rentrant en jeu dans chacune des équations déterminantales.

Compte tenu des expressions littérales obtenues pour les intégrales suivantes, à l'aide de coefficients de Fourier des fonctions angulaires de Mathieu :

$$\text{En posant } G_j\left(\eta,\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\left(1+\partial_{j,0}\right)}Q_{j-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right)$$

$$\begin{cases}\Theta_{2p,2n}^{(2,j)}(q)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta\, Cos(2j\theta)ce_{2p}(\theta,q)\,ce_{2n}(\theta,q)=\dfrac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}\\ I_{2p,2n}^{c}(\eta,q)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\dfrac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{Q_{j-\frac{1}{2}}\left(Cosh(2\eta)\right)}{\left(1+\partial_{j,0}\right)}\Theta_{2p,2n}^{(2,j)}(q)=\sum_{j=0}^{j=\infty}G_j\left(2\eta,\frac{1}{2}\right)\Theta_{2p,2n}^{(2,j)}(q)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Theta_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}d\theta\, Cos(2j\theta)ce_{2p+1}(\theta,q)ce_{2n+1}(\theta,q)=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[A_{2l+1}^{(2p+1)}(q)A_{2(l+j)+1}^{(2n+1)}(q)+A_{2(l+j)+1}^{(2p+1)}(q)A_{2l+1}^{(2n+1)}(q)\right]+\sum_{l=0}^{l=j-1}A_{2l+1}^{(2p+1)}(q)A_{2(j-l)-1}^{(2n+1)}(q)\right)\\ I_{2p+1,2n+1}^{c}(\eta,q)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\dfrac{ce_{2p+1}(\theta,q)ce_{2n+1}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{Q_{j-\frac{1}{2}}\left(Cosh(2\eta)\right)}{\left(1+\partial_{j,0}\right)}\Theta_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q)=\sum_{j=0}^{j=\infty}G_j\left(2\eta,\frac{1}{2}\right)\Theta_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Psi_{2p,2n}^{(2,j)}(q)=\dfrac{1}{2}\left\{\displaystyle\sum_{l=1}^{l=\infty}\left[B_{2l}^{(2p)}(q)B_{2(l+j)}^{(2n)}(q)+B_{2(l+j)}^{(2p)}(q)B_{2l}^{(2n)}(q)\right]-\sum_{l=1}^{l=j-1}B_{2l}^{(2p)}(q)B_{2(j-l)}^{(2n)}(q)\right\}\\ I_{2p,2n}^{s}(\eta,q)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\dfrac{se_{2p}(\theta,q)se_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{Q_{j-\frac{1}{2}}\left(Cosh(2\eta)\right)}{\left(1+\partial_{j,0}\right)}\Psi_{2p,2n}^{(2,j)}(q)=\sum_{j=0}^{j=\infty}G_j\left(2\eta,\frac{1}{2}\right)\Psi_{2p,2n}^{(2,j)}(q)\quad pour\quad p,n>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Psi_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q)=\dfrac{1}{2}\left\{\displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty}\left[B_{2l+1}^{(2p+1)}(q)B_{2(l+j)+1}^{(2n+1)}(q)+B_{2(l+j)+1}^{(2p+1)}(q)B_{2l+1}^{(2n+1)}(q)\right]-\sum_{l=0}^{l=j-1}B_{2l+1}^{(2p)}(q)B_{2(j-1-l)+1}^{(2n)}(q)\right\}\\ I_{2p+1,2n+1}^{s}(\eta,q)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\dfrac{se_{2p+1}(\theta,q)se_{2n+1}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{Q_{j-\frac{1}{2}}\left(Cosh(2\eta)\right)}{\left(1+\partial_{j,0}\right)}\Psi_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q)=\sum_{j=0}^{j=\infty}G_j\left(2\eta,\frac{1}{2}\right)\Psi_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q)\end{cases}$$

Et de l'application de la condition aux limites sur le bord $\eta=\eta_0$, alors les 4 équations déterminantales permettent l'obtention du jeu de valeurs propres du problème aux limites (à chaque fois nous donnons les trois formes possibles des équations déterminantales) :

$$Y_+X_+ \rightarrow \begin{cases} E_{2n,2p} = \beta c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \dfrac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \\ \Leftrightarrow E_{2n,2p} = \beta\, c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \dfrac{4\alpha}{\pi}\dfrac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Theta_{2p,2n}^{(2,j)}(q) \\ \Leftrightarrow E_{2n,2p} = \beta\, c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \alpha\sqrt{2}\dfrac{dJe_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(\eta,\dfrac{1}{2}\right)\Theta_{2p,2n}^{(2,j)}(q) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} E_{0,0} & E_{0,2} & E_{0,4} & \dots & \dots \\ E_{2,0} & E_{2,2} & E_{2,4} & \dots & \dots \\ E_{4,0} & E_{4,2} & E_{4,4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$Y_-X_+ \rightarrow \begin{cases} E_{2n+1,2p+1} = \beta c\, Je_{2p+1}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{dJe_{2p+1}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \dfrac{ce_{2p+1}(\theta,q)ce_{2n+1}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \\ \Leftrightarrow E_{2n+1,2p+1} = \beta\, c\, Je_{2p+1}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \dfrac{4\alpha}{\pi}\dfrac{dJe_{2p+1}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Theta_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q) \\ \Leftrightarrow E_{2n+1,2p+1} = \beta\, c\, Je_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \alpha\sqrt{2}\dfrac{dJe_{2p+1}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(\eta,\dfrac{1}{2}\right)\Theta_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} E_{1,1} & E_{1,3} & E_{1,5} & \dots & \dots \\ E_{3,1} & E_{3,3} & E_{3,5} & \dots & \dots \\ E_{5,1} & E_{5,3} & E_{5,5} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$Y_+X_- \rightarrow \begin{cases} E_{2n+1,2p+1} = \beta c\, Jo_{2p+1}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{dJo_{2p+1}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \dfrac{se_{2p+1}(\theta,q)se_{2n+1}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \\ \Leftrightarrow E_{2n+1,2p+1} = \beta\, c\, Jo_{2p+1}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \dfrac{4\alpha}{\pi}\dfrac{dJo_{2p+1}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q) \\ \Leftrightarrow E_{2n+1,2p+1} = \beta\, c\, Jo_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \alpha\sqrt{2}\dfrac{dJo_{2p+1}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(\eta,\dfrac{1}{2}\right)\Psi_{2p+1,2n+1}^{(2,j)}(q) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} E_{1,1} & E_{1,3} & E_{1,5} & \dots & \dots \\ E_{3,1} & E_{3,3} & E_{3,5} & \dots & \dots \\ E_{5,1} & E_{5,3} & E_{5,5} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

$$Y_-X_- \rightarrow \begin{cases} n,p>0 \quad E_{2n,2p} = \beta c\, Jo_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\dfrac{dJo_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \dfrac{se_{2p}(\theta,q)se_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_0)-Cos(2\theta)}} \\ \Leftrightarrow E_{2n,2p} = \beta\, c\, Jo_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \dfrac{4\alpha}{\pi}\dfrac{dJo_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\dfrac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(2,j)}(q) \\ \Leftrightarrow E_{2n,2p} = \beta\, c\, Jo_{2p}(\eta_0,q)\delta_{n,p} + \alpha\sqrt{2}\dfrac{dJo_{2p}(\eta_0,q)}{d\eta}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty} G_j\left(\eta,\dfrac{1}{2}\right)\Psi_{2p,2n}^{(2,j)}(q) \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} E_{2,2} & E_{2,4} & E_{2,6} & \dots & \dots \\ E_{4,2} & E_{4,4} & E_{4,6} & \dots & \dots \\ E_{6,2} & E_{6,4} & E_{6,6} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

Problème aux limites avec conditions initiales pour l' équation de la chaleur (diffusion) – p

Dans cet exemple nous nous contentons de donner les valeurs propres pour les trois composantes Y+X-, Y-X+ et Y-X-, sans donner la forme de la solution générale qui se construit de manière similaires au cas Y+X+ précédent et conduirait surtout à des formules disons plus « lourdes ».

Comme le produit vb, solution de l'équation déterminantale, ne dépend a priori que du rapport du grand et petit axe de l'ellipse voici le tableau des 8 premières valeurs propres vb avec les valeurs indicielles du problème Y-X+, pour a/b=2 et diverses valeurs de βb/α :

β,α	2n+1=1, m=1	2n+1=3, m=1	2n+1=5, m=1	2n+1=1, m=2	2n+1=3, m=2	2n+1=7, m=1	2n+1=5, m=2	2n+1=9, m=1
$\beta=0,\alpha=1$	0.9367878146075151	2.464532987799085	3.94462670053534	3.9357388631974053	5.140872908320463	5.390735835810777	6.445595207905498	6.805477192504899
$\beta=1,\alpha=1$	1.5706592008471707	2.8378921945856317	4.229150597730105	4.192012699427966	5.351131379519208	5.641248567120121	6.611705552781999	7.038380826592329
$\beta=10,\alpha=1$	2.3201932877075224	3.615269991294241	5.09230521119827	4.985795317514367	6.214790943284128	6.388851441253715	7.413200996452317	7.802515092329577
$\beta=100,\alpha=1$	2.4852963618991155	3.8314089090938577	5.254231507956606	5.4881847613141925	6.644804040722869	6.708853663443415	7.880311438825546	8.174706909731716
$\beta=1,\alpha=0$	2.5050809608045164	3.8571108533922573	5.286510872158926	5.5393484595241365	6.705723644862036 5	6.748311432181999	7.942828761379677	8.221916601384622

Voici le tableaux des 8 premières valeurs propres vb avec les valeurs indicielles du problème Y+X-, pour a/b=2 et diverses valeurs de βb/α :

β,α	2n+1=1, m=1	2n+1=3, m=1	2n+1=5, m=1	2n+1=1, m=2	2n+1=7, m=1	2n+1=3, m=2	2n+1=9, m=1	2n+1=5, m=2
$\beta=0,\alpha=1$	1.76769995975298 5	2.9175824240881116	4.1911750227854725	4.95952592889212 5	5.51854519381147 5	6.07512005858413 3	6.86729348786750 4	7.27198023932490 1
$\beta=1,\alpha=1$	2.24169364003724 3	3.3147605032491225	4.5253958961976455	5.15678269650824 5	5.8095576628156955	6.24919775538845 4	7.12477518307565 5	7.42410952420240 7
$\beta=10,\alpha=1$	3.1304168179017893	4.23789126663065 8	5.44498420076714	6.01680493062174	6.71431580289038 8	7.08083785865452 15	8.02083155323282 6	8.21446497603852 4
$\beta=100,\alpha=1$	3.3932372322233073	4.54660103007275 9	5.7976828340236874	6.49181278449245 1	7.11036409931367 1	7.59122175417689 2	8.46076076521325 7	8.75535025597175 4
$\beta=1,\alpha=0$	3.4258817017069667	4.58508769918180 6	5.8420356693404605	6.55553771720248 1	7.16087889222961 9	7.66085861811503 3	8.51783383716200 3	8.83071849914525 4

Tableaux des 8 premières valeurs propres vb avec les valeurs indicielles du problème Y+X-, pour a/b=2 et diverses valeurs de βb/α :

β,α	2n+1=1, m=1	2n+1=3, m=1	2n+1=5, m=1	2n+1=1, m=2	2n+1=7, m=1	2n+1=3, m=2	2n+1=9, m=1	2n+1=5, m=2
$\beta=0,\alpha=1$	2.320622763695828	3.54447666969971	4.8507503334816	5.505966961520026	6.191429980478611	6.664547043987318	7.544710239097943 5	7.895335963301026
$\beta=1,\alpha=1$	2.755913551685493 3	3.9075815028205	5.16115758429552	5.691556097403769	6.466710052545637	6.827429381809178	7.791770015246956	8.037257909671741
$\beta=10,\alpha=1$	3.668762458966482	4.83167775014423	6.073642563381025	6.539376944372528	7.364335267886434	7.639677123501225	8.683345799513075	8.803891536112525
$\beta=100,\alpha=1$	3.954897764151027	5.162510508782088	6.44805993500187	7.032691454298132	7.781963896353151	8.165911301783572	9.145022604389888	9.35822711579898
$\beta=1,\alpha=0$	3.990484178253366 7	5.203905958688762	6.495446693538935	7.0993989083896984	7.835710823979065	8.238432304295333	9.20554488039512	9.436413883611415

Etude d'un problème transitoire de diffusion en coordonnées elliptiques avec deux conditions aux limites de Robin homogène: cylindre creux de longueur infinie de section elliptique soumis à une condition initiale de température fixe T_0, et des condition aux limites de Robin homogènes de température sur la surface extérieure et intérieure, problème de refroidissement

Le régime transitoire est solution du problème suivant, étant donné que nous devons prendre les dérivées par rapport à la normale extérieur aux surfaces où les conditions de Robin s'appliquent :

$$\Delta T(\eta,\theta,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial t}=0 \qquad C.I \quad T(\eta,\theta,0)=T_0$$

$$C.L. \quad -\frac{\alpha_1}{c\sqrt{Cosh^2(\eta_1)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}+\beta_1\, T(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_1}=0 \qquad \frac{\alpha_2}{c\sqrt{Cosh^2(\eta_2)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}+\beta_2\, T(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_2}=0$$

D'après les propriétés des fonctions de Mathieu périodiques. La solution complète est à rechercher sous la forme d'une série, la multiplicité des valeurs propres du problème aux limites est fonction des conditions aux limites homogènes. La décomposition est logiquement à double indice, un indice n lié à la décomposition en fonctions angulaires périodiques de Mathieu, et un indice lié aux valeurs propres $q_{n,m}$ obtenu d'après le respect des conditions aux limites homogènes sur la surface pour chaque indice n : $\Rightarrow T(\eta,\theta,t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left\{A_{2n,m}Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})+B_{2n,m}Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})e^{-\delta\frac{4q_{2n,m}}{c^2}t}$.

Les calculs sont assez similaires aux exemples précédents, à ceci près qu'il y a maintenant deux conditions aux limites de Robin donc deux système linéaires infini. En théorie pour avoir une solution non triviale (nulle) des coefficient B_{2n} , il faut que le déterminant infini soit nul :

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\left\{c\beta_1\left\{A_{2p}Je_{2p}(\eta_1,q)+B_{2p}Ne_{2p}(\eta_1,q)\right\}\delta_{n,p}-\frac{\alpha_1\sqrt{2}}{\pi}\left\{A_{2p}Je_{2p}'(\eta_1,q)+B_{2p}Ne_{2p}'(\eta_1,q)\right\}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}\right\}=0$$

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\left\{c\beta_2\left\{A_{2p}Je_{2p}(\eta_2,q)+B_{2p}Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\frac{\alpha_2\sqrt{2}}{\pi}\left\{A_{2p}Je_{2p}'(\eta_2,q)+B_{2p}Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}\right\}=0$$

Posons $\quad I_{2p,2n}(\eta_1,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}} \quad I_{2p,2n}(\eta_2,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}$

$$\begin{cases}\sum_{p=0}^{p=\infty}A_{2p}\left(c\beta_1Je_{2p}(\eta_1,q)\delta_{n,p}-\alpha_1\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_1,q)\right)+B_{2p}\left(c\beta_1Ne_{2p}(\eta_1,q)\delta_{n,p}-\alpha_1\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_1,q)\right)=0\\ \sum_{p=0}^{p=\infty}A_{2p}\left(c\beta_2Je_{2p}(\eta_2,q)\delta_{n,p}+\alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)\right)+B_{2p}\left(c\beta_2Ne_{2p}(\eta_2,q)\delta_{n,p}+\alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right)=0\end{cases}$$

Indice de Kronecker $\quad \delta_{i,j} \quad \Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}$

$$I_{2p,2n}(\eta,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)$$

$$J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cJe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Je_{2p}'(\eta,q) \quad N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cNe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Ne_{2p}'(\eta,q)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sum_{p=0}^{p=\infty}J_{2n,2p}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)A_{2p}+N_{2n,2p}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)B_{2p}=0\\ \sum_{p=0}^{p=\infty}J_{2n,2p}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)A_{2p}+N_{2n,2p}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)B_{2p}=0\end{cases} \qquad pour \quad n=0,1,2,...$$

En introduisant un formalisme matriciel, on obtient un unique système linéaire infini, comme suit :

$$\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}$$

$$I_{2p,2n}(\eta,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{\left(1+\partial_{j,0}\right)}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)$$

$$J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cJe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Je_{2p}'(\eta,q)$$

$$N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cNe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Ne_{2p}'(\eta,q)$$

$$\begin{cases}(1)\qquad \sum_{p=0}^{p=\infty}J_{2n,2p}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)A_{2p}+N_{2n,2p}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)B_{2p}=0\\ (2)\qquad \sum_{p=0}^{p=\infty}J_{2n,2p}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)A_{2p}+N_{2n,2p}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)B_{2p}=0\end{cases}\qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}A_0\\A_2\\\dots\\A_{2p}\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}B_0\\B_2\\\dots\\B_{2p}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}(\eta,q,\beta,\alpha)=\left[J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\right]\quad \mathbf{N}(\eta,q,\beta,\alpha)=\left[N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\right]$$

$$\begin{cases}\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{A}+\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{B}=0\\ \mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{A}+\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1) & \mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)\\ \mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2) & \mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\\mathbf{B}\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow Det\begin{bmatrix}\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1) & \mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)\\ \mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2) & \mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)\end{bmatrix}=0$$

Dans les cas limites que je vais exposer plus loin, il y a un intérêt à présenter le problème en introduisant des matrices adjointes :

$$(1)\mathbf{A}=-\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}.\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{B}$$

$$(2)\Rightarrow\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}-\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}.\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{B}=0$$

$$\Leftrightarrow\left\{\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}.\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\right\}.\mathbf{B}=0$$

$$\rightarrow\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=\left[E_{2n,2p}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)\right]=\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}.\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}=0\Rightarrow\Delta=\det\left(\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)\right)=\begin{vmatrix}E_{0,0} & E_{0,2} & E_{0,4} & \dots & \dots\\ E_{2,0} & E_{2,2} & E_{2,4} & \dots & \dots\\ E_{4,0} & E_{4,2} & E_{4,4} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}=0$$

Avec les matrices adjointes , il vient une formule plus symétrique :

$$\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}=\frac{\mathbf{J}^{adj}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)}{Det(\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1))}\quad \mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}=\frac{\mathbf{N}^{adj}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)}{Det(\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1))}$$

$$Posons\quad \mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=Det(\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1))Det(\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1))\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=\begin{Bmatrix} Det(\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1))\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{N}^{adj}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)- \\ -Det(\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1))\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{J}^{adj}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1) \end{Bmatrix}$$

$$et\quad \mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}=0\Leftrightarrow Det(\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2))$$

Et surtout l'intérêt d'utiliser les matrices adjointes est d'éviter de rencontrer des pôles générés par la matrice inverse $\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}$ *lors de la recherche des racines de l'équation déterminantale.*

<u>*Remarque sur la simplification du déterminant*</u>

Dans le cas où certaines des 4 sous-matrices commutent deux à deux alors le déterminant

$$Det\begin{bmatrix}\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1) & \mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)\\ \mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2) & \mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)\end{bmatrix}=0$$

se simplifie. Posons un déterminant avec 4 sous-matrices de la forme suivante, on a diverses propriétés du déterminant par bloc :

$$Si\quad \mathbf{A}\ inversible\quad Det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}=Det[\mathbf{A}.\mathbf{D}-\mathbf{A}.\mathbf{C}.\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{B}]=Det[\mathbf{A}.\mathbf{D}-\mathbf{A}.\mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{C}]=Det[\mathbf{D}.\mathbf{A}-\mathbf{B}.\mathbf{A}^{-1}.\mathbf{C}.\mathbf{A}]$$

$$\rightarrow Si\quad \mathbf{C}.\mathbf{A}=\mathbf{A}.\mathbf{C}\Rightarrow Det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}=Det[\mathbf{A}.\mathbf{D}-\mathbf{C}.\mathbf{B}]=Det[\mathbf{D}.\mathbf{A}-\mathbf{B}.\mathbf{C}]$$

$$\rightarrow Si\quad \mathbf{B}.\mathbf{A}=\mathbf{A}.\mathbf{B}\Rightarrow Det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}=Det[\mathbf{A}.\mathbf{D}-\mathbf{B}.\mathbf{C}]=Det[\mathbf{D}.\mathbf{A}-\mathbf{B}.\mathbf{C}]$$

$$Si\quad \mathbf{D}\ inversible\quad Det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}=Det[\mathbf{A}.\mathbf{D}-\mathbf{B}.\mathbf{D}^{-1}.\mathbf{C}.\mathbf{D}]$$

$$\rightarrow Si\quad \mathbf{C}.\mathbf{D}=\mathbf{D}.\mathbf{C}\Rightarrow Det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}=Det[\mathbf{A}.\mathbf{D}-\mathbf{B}.\mathbf{C}]$$

Ces propriétés peuvent être mises à profit lorsque les conditions aux limites sont homogènes Neumann ou Dirichlet sur l'un des deux bords, sur les matrices suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{J}(\eta,q,\beta,\alpha) = \beta c\ \mathbf{J}^{diag}(\eta,q) + \alpha\sqrt{2}\ \mathbf{J}'^{diag}(\eta,q).\mathbf{It}(\eta,q) \\ \mathbf{N}(\eta,q,\beta,\alpha) = \beta c\ \mathbf{N}^{diag}(\eta,q) + \alpha\sqrt{2}\ \mathbf{N}'^{diag}(\eta,q).\mathbf{It}(\eta,q) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{J}(\eta_1,q,\beta,-\alpha_1) \qquad \mathbf{B} = \mathbf{N}(\eta_1,q,\beta,-\alpha_1) \\ \mathbf{C} = \mathbf{J}(\eta_2,q,\beta,-\alpha_2) \qquad \mathbf{D} = \mathbf{N}(\eta_2,q,\beta,-\alpha_2) \end{cases}$$

$$Si \quad \beta_1^{\ 2} = \beta_1 \quad \alpha_1^{\ 2} = \alpha_1 \quad \alpha_1\beta_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{\beta_1}{c}\ \mathbf{J}^{diag^{-1}}(\eta_1,q) + \dfrac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\ \mathbf{J}'^{diag^{-1}}(\eta_1,q).\mathbf{It}^{-1}(\eta_1,q) \\ \mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A} \end{cases}$$

$$Si \quad \beta_2^{\ 2} = \beta_2 \quad \alpha_2^{\ 2} = \alpha_2 \quad \alpha_2\beta_2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{C}^{-1} = \dfrac{\beta_2}{c}\ \mathbf{J}^{diag^{-1}}(\eta_2,q) + \dfrac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\ \mathbf{J}'^{diag^{-1}}(\eta_2,q).\mathbf{It}^{-1}(\eta_2,q) \\ \mathbf{C}.\mathbf{D} = \mathbf{D}.\mathbf{C} \end{cases}$$

Cas limites permettant la simplification de l'équation déterminantale

Condition homogène de Dirichlet/Neumann de part et d'autre

Lorsque les conditions sont homogènes de part et d'autre, les coefficients α, β suivent des relations simples qui permettent de factoriser une matrice diagonale dans le système linéaire résultant. La seconde matrice n'a pas un déterminant qui s'annule. Les calculs indicatifs sont les suivants et conduisent à l'annulation du déterminant d'une matrice entièrement diagonale :

$$Avec \quad \alpha_1+\beta_1=1 \quad \alpha_1\in\{0,1\} \quad \alpha_2+\beta_2=1 \quad \alpha_2\in\{0,1\}$$

$$J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cJe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}Je_{2p}'(\eta,q)I_{2p,2n}(\eta,q) \quad N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\left(\beta cNe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}Ne_{2p}'(\eta,q)I_{2p,2n}(\eta,q)\right)$$

$$\mathbf{It}(\eta,q)=\left[I_{2p,2n}(\eta,q)\right] \quad \mathbf{J}^{diag}(\eta,q)=\left[Je_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}\right] \quad \mathbf{J}'^{diag}(\eta,q)=\left[Je_{2p}'(\eta,q)\delta_{n,p}\right] \quad \mathbf{N}^{diag}(\eta,q)=\left[Ne_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}\right] \quad \mathbf{N}'^{diag}(\eta,q)=\left[Ne_{2p}'(\eta,q)\delta_{n,p}\right]$$

$$\mathbf{J}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta c\mathbf{J}^{diag}(\eta,q)+\alpha\sqrt{2}\mathbf{J}'^{diag}(\eta,q).\mathbf{It}(\eta,q) \quad \mathbf{N}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta c\mathbf{N}^{diag}(\eta,q)+\alpha\sqrt{2}\mathbf{N}'^{diag}(\eta,q).\mathbf{It}(\eta,q)$$

$$Or \quad \beta_1^{\,2}=\beta_1 \quad \alpha_1^{\,2}=\alpha_1 \quad \alpha_1\beta_1=0 \qquad \beta_2^{\,2}=\beta_2 \quad \alpha_2^{\,2}=\alpha_2 \quad \alpha_2\beta_2=0$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}=\frac{\beta_1}{c}\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\mathbf{It}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}=\frac{\beta_1}{c}\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{It}(\eta_1,q)^{-1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}.\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)=\left\{\frac{\beta_1}{c}\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{It}(\eta_1,q)^{-1}\right\}\left\{\beta_1 c\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\sqrt{2}\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q).\mathbf{It}(\eta_1,q)\right\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}.\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)=\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)$$

$$De\ même \begin{cases}\beta_2 c\mathbf{J}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\sqrt{2}\mathbf{J}'^{diag}(\eta_2,q).\mathbf{It}(\eta_2,q)=\left(\beta_2 c\mathbf{J}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\sqrt{2}\mathbf{J}'^{diag}(\eta_2,q)\right).\left(\beta_2\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{It}(\eta_2,q)\right)\\ \beta_2 c\mathbf{N}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\sqrt{2}\mathbf{N}'^{diag}(\eta_2,q).\mathbf{It}(\eta_2,q)=\left(\beta_2 c\mathbf{N}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\sqrt{2}\mathbf{N}'^{diag}(\eta_2,q)\right).\left(\beta_2\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{It}(\eta_2,q)\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=\left\{\begin{array}{l}\beta_2 c\mathbf{N}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\sqrt{2}\mathbf{N}'^{diag}(\eta_2,q)-\\ -\left[\begin{array}{l}\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\\ .\left\{\beta_2 c\mathbf{J}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\sqrt{2}\mathbf{J}'^{diag}(\eta_2,q)\right\}\end{array}\right]\end{array}\right\}.\left(\beta_2\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{It}(\eta_2,q)\right)$$

$$\forall\eta_2,q \quad Det\left(\beta_2\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{It}(\eta_2,q)\right)\neq 0$$

$$Comme \quad \left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}=\beta_1.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)$$

$$\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\left\{\frac{\beta_2}{c}\mathbf{I}+\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\mathbf{I}\right\}.\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\left\{\beta_2\mathbf{N}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\mathbf{N}'^{diag}(\eta_2,q)\right\}-\\ -\left\{\beta_1.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\left\{\beta_2\mathbf{J}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\mathbf{J}'^{diag}(\eta_2,q)\right\}\end{array}\right\}.\left(\beta_2\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{It}(\eta_2,q)\right)$$

$$Soit \quad \widetilde{\mathbf{E}}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=\left\{\begin{array}{l}\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\left\{\beta_2\mathbf{N}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\mathbf{N}'^{diag}(\eta_2,q)\right\}-\\ -\left\{\beta_1.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\left\{\beta_2\mathbf{J}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\mathbf{J}'^{diag}(\eta_2,q)\right\}\end{array}\right\}$$

$$\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}=0\Leftrightarrow\widetilde{\mathbf{E}}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2).\left(\beta_2\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{It}(\eta_2,q)\right).\mathbf{B}=0$$

$$Det\left(\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)\right)=Det\left(\widetilde{\mathbf{E}}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)\right)Det\left(\beta_2\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{It}(\eta_2,q)\right)\Rightarrow Det\left(\widetilde{\mathbf{E}}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)\right)=0$$

La matrice étant entièrement diagonale, l'équation déterminantale devient une simple équation transcendantale :

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=\begin{Bmatrix}\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\}\{\beta_2\mathbf{N}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\mathbf{N}'^{diag}(\eta_2,q)\}- \\ -\{\beta_1.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\}\{\beta_2\mathbf{J}^{diag}(\eta_2,q)+\alpha_2\mathbf{J}'^{diag}(\eta_2,q)\}\end{Bmatrix}$$

$$Det\left(\widetilde{\mathbf{E}}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)\right)\Leftrightarrow\prod_{l=0}^{+\infty}\begin{bmatrix}\left\{\beta_1 Je_{2l}(\eta_1,q)-\alpha_1\dfrac{dJe_{2l}(\eta_1,q)}{d\eta}\right\}\left\{\beta_2 Ne_{2l}(\eta_2,q)+\alpha_2\dfrac{dNe_{2l}(\eta_2,q)}{d\eta}\right\}- \\ -\left\{\beta_1 Ne_{2l}(\eta_1,q)-\alpha_1\dfrac{dNe_{2l}(\eta_1,q)}{d\eta}\right\}\left\{\beta_2 Je_{2l}(\eta_2,q)+\alpha_2\dfrac{dJe_{2l}(\eta_2,q)}{d\eta}\right\}\end{bmatrix}=0$$

$$\begin{cases}\forall l\quad l=0,1,2,... \\ \left\{\beta_1 Je_{2l}(\eta_1,q)-\alpha_1\dfrac{dJe_{2l}(\eta_1,q)}{d\eta}\right\}\left\{\beta_2 Ne_{2l}(\eta_2,q)+\alpha_2\dfrac{dNe_{2l}(\eta_2,q)}{d\eta}\right\}=\left\{\beta_1 Ne_{2l}(\eta_1,q)-\alpha_1\dfrac{dNe_{2l}(\eta_1,q)}{d\eta}\right\}\left\{\beta_2 Je_{2l}(\eta_2,q)+\alpha_2\dfrac{dJe_{2l}(\eta_2,q)}{d\eta}\right\}\end{cases}$$

<u>*Condition homogène de Dirichlet/Neumann sur un seul bord*</u>

Prenons par exemple une condition de Dirichlet/Neumann sur la face interne du cylindre, il vient :

$$Avec\quad \alpha_1+\beta_1=1\quad \alpha_1\in\{0,1\}\Rightarrow\quad \beta_1^{\,2}=\beta_1\quad \alpha_1^{\,2}=\alpha_1\quad \alpha_1\beta_1=0$$

$$J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cJe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}Je_{2p}'(\eta,q)I_{2p,2n}(\eta,q)\quad N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\left(\beta cNe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}Ne_{2p}'(\eta,q)I_{2p,2n}(\eta,q)\right)$$

$$\mathbf{It}(\eta,q)=\left[I_{2p,2n}(\eta,q)\right]\quad \mathbf{J}^{diag}(\eta,q)=\left[Je_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}\right]\quad \mathbf{J}'^{diag}(\eta,q)=\left[Je_{2p}'(\eta,q)\delta_{n,p}\right]\quad \mathbf{N}^{diag}(\eta,q)=\left[Ne_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}\right]\quad \mathbf{N}'^{diag}(\eta,q)=\left[Ne_{2p}'(\eta,q)\delta_{n,p}\right]$$

$$\mathbf{J}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta c\mathbf{J}^{diag}(\eta,q)+\alpha\sqrt{2}\mathbf{J}'^{diag}(\eta,q).\mathbf{It}(\eta,q)\quad \mathbf{N}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta c\mathbf{N}^{diag}(\eta,q)+\alpha\sqrt{2}\mathbf{N}'^{diag}(\eta,q).\mathbf{It}(\eta,q)$$

$$\Rightarrow\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}=\frac{\beta_1}{c}\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\mathbf{It}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}=\frac{\beta_1}{c}\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{It}(\eta_1,q)^{-1}$$

$$\Rightarrow\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}.\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)=\left\{\frac{\beta_1}{c}\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}-\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{It}(\eta_1,q)^{-1}\right\}\left\{\beta_1 c\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\sqrt{2}\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q).\mathbf{It}(\eta_1,q)\right\}$$

$$\Rightarrow\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}.\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)=\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)$$

$$Comme\quad \mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)^{-1}.\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)$$

$$\Rightarrow\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}$$

$$Comme\quad \left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)+\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)+\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)^{-1}.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}=\beta_1.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)+\alpha_1.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)$$

$$\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)+\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=$$

$$=\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)+\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\left\{\beta_1.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)+\alpha_1.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).$$

$$Soit\quad \widetilde{\mathbf{E}}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)+\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\left\{\beta_1.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)+\alpha_1.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)$$

$$\Rightarrow Det\left(\widetilde{\mathbf{E}}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)\right)=0$$

Très concrètement le calcul des coefficients de la matrice est alors le suivant :

$$\text{Indice de Kronecker}\quad \delta_{i,j}\quad \Psi^{(j)}_{2p,2n}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A^{(2p)}_{2l}(q)\left\{A^{(2n)}_{2(l+j)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A^{(2n)}_{2|l-j|}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}$$

$$I_{2p,2n}(\eta,q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)}}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi^{(j)}_{2p,2n}(q)\quad \mathbf{J}^{diag}(\eta,q)=\left[Je_{2n}(\eta,q)\delta_{n,p}\right]\quad \mathbf{J}'^{diag}(\eta,q)=\left[Je_{2n}'(\eta,q)\delta_{n,p}\right]$$

$$J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cJe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Je_{2p}'(\eta,q)\quad N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cNe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Ne_{2p}'(\eta,q)$$

$$\left[E_{2n,2p}\right]=\left\{\beta_1\mathbf{J}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1\mathbf{J}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\left\{\beta_1.\mathbf{N}^{diag}(\eta_1,q)-\alpha_1.\mathbf{N}'^{diag}(\eta_1,q)\right\}.\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)$$

$$E_{2n,2p}=\left\{\beta_1Je_{2p}(\eta_1,q)-\alpha_1Je_{2p}'(\eta_1,q)\right\}N_{2n,2p}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\left\{\beta_1Ne_{2p}(\eta_1,q)-\alpha_1Ne_{2p}'(\eta_1,q)\right\}J_{2n,2p}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)$$

$$\begin{cases}\beta_1=0\quad\alpha_1=1\Rightarrow E_{2n,2p}=-Je_{2p}'(\eta_1,q)\left\{\beta_2cNe_{2p}(\eta_2,q)\delta_{n,p}+\alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}+Ne_{2p}'(\eta_1,q)\left\{\beta_2cJe_{2p}(\eta_2,q)\delta_{n,p}+\alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\\ \Rightarrow E_{2n,2p}=\beta_2c\delta_{n,p}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}+\alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\\ \beta_1=1\quad\alpha_1=0\Rightarrow E_{2n,2p}=Je_{2p}(\eta_1,q)\left\{\beta_2cNe_{2p}(\eta_2,q)\delta_{n,p}+\alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}-Ne_{2p}(\eta_1,q)\left\{\beta_2cJe_{2p}(\eta_2,q)\delta_{n,p}+\alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\\ \Rightarrow E_{2n,2p}=\beta_2c\delta_{n,p}\left\{Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)-Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)\right\}+\alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)\left\{Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)-Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\end{cases}$$

Dégénérescence vers une configuration circulaire

Lorsque l'ellipse dégénère en cercle, les formules de passage suivantes ont lieu :

$$\text{Ellipse grand axe } a_2\text{ , petit axe } b_2\Rightarrow c=\sqrt{a_2^{\,2}-b_2^{\,2}}\quad a_2=cCosh(\eta_2)\quad b_2=cSinh(\eta_2)\Rightarrow\eta_2=ArcCosh\left(\frac{a_2}{c}\right)$$

$$\text{Ellipse grand axe } a_1\text{ , petit axe } b_1\Rightarrow a_1=cCosh(\eta_1)\quad b_1=cSinh(\eta_1)\Rightarrow\eta_1=ArcCosh\left(\frac{a_1}{c}\right)\qquad c=b_2\sqrt{\frac{a_2^{\,2}}{b_2^{\,2}}-1}$$

$$a_{1,2}\to b_{1,2}\Rightarrow c\to 0\quad et\quad \eta_{1,2}\to\infty\quad et\quad\begin{cases}cCosh(\eta)\to r\\ cSinh(\eta)\to r\end{cases}\Rightarrow c\frac{e^{\eta_{1,2}}}{2}\to r_{1,2}=a_{1,2}=b_{1,2}$$

$$\frac{ce^{\eta}}{2}\to r\Rightarrow\frac{c^2e^{2\eta}}{4}\to r^2\quad\frac{dr}{d\eta}=r\qquad qe^{2\eta}\to\nu^2r^2\Rightarrow q\to\frac{c^2\nu^2}{4}\Rightarrow\frac{2\sqrt{q}}{c}\to\nu$$

$$ce_0(\vartheta,q)\to\frac{1}{\sqrt{2}}\quad ce_{2n}(\vartheta,q)\to Cos(2n\vartheta)\quad Je_{2n}(\eta,q)\to p'_{2n}J_{2n}(\nu r)\quad Ne_{2n}(\eta,q)\to p'_{2n}Y_{2n}(\nu r)\quad p'_{2n}\quad\text{se neutralise dans le développement}$$

$$Je_{2n}'(\eta,q)\to p'_{2n}\nu rJ_{2n}'(\nu r)\quad Ne_{2n}'(\eta,q)\to p'_{2n}\nu rY_{2n}'(\nu r)$$

Si bien que l'équation déterminantale se simplifie également:

$$\eta_{1,2}\to\infty\Rightarrow I_{2p,2n}(\eta,q)\approx\frac{\sqrt{2}}{e^{\eta}}\delta_{n,p}\quad et\quad\frac{ce^{\eta}}{2}\approx r\Rightarrow I_{2p,2n}(\eta,q)\approx\frac{c}{\sqrt{2}r}\delta_{n,p}$$

$$\left.\begin{aligned}J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)&\approx p'_{2n}c\delta_{n,p}\left(\beta J_{2p}(\nu r)+\alpha\nu J_{2p}'(\nu r)\right)\\ N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)&\approx p'_{2n}c\delta_{n,p}\left(\beta Y_{2p}(\nu r)+\alpha\nu Y_{2p}'(\nu r)\right)\end{aligned}\right\}\Rightarrow\mathbf{J}\quad et\quad\mathbf{N}\quad\text{matrices diagonales}$$

$$\to\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2)=\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)$$

Equation transcendantale

$$\left(\beta_1J_{2p}(\nu r_1)-\alpha_1\nu J_{2p}'(\nu r_1)\right)\left(\beta_2Y_{2p}(\nu r_2)+\alpha_2\nu Y_{2p}'(\nu r_2)\right)=\left(\beta_2J_{2p}(\nu r_2)+\alpha_2\nu J_{2p}'(\nu r_2)\right)\left(\beta_1Y_{2p}(\nu r_1)-\alpha_1\nu Y_{2p}'(\nu r_1)\right)$$

Dégénérescence vers deux bandes centrées de part et d'autre de l'axe des abscisses

On cherche à calculer la répartition de température sur l'espace sur la bande supérieure (ou inférieur) situé entre la hauteur b_1 et b_2, donc de largeur b_2-b_1. Il s'agit du cas $a_1/b_1 \to \infty$ et $a_2/b_2 \to \infty$. Les paramètres du problème aux limites prennent la forme suivante :

$$c=\sqrt{a_2{}^2-b_2{}^2} \quad \eta_2=ArcCosh\left(\frac{a_2}{c}\right)\approx ArcCosh(1)\Rightarrow \eta_2\approx 0 \quad b_{1,2}=cSinh(\eta_{1,2})\approx c\eta_{1,2}\approx a_2\eta_{1,2}\Rightarrow \eta_{1,2}\approx\frac{b_{1,2}}{a_2}\to 0$$

Dans un problème cartésien, la condition aux limites radiales se transforme en une condition aux limites angulaires pour les valeurs $\vartheta=\pi/2$ et $\vartheta=-\pi/2$ et , soit en $y=+b_{1,2}$ et $y=-b_{1,2}$. Soit :

$$\frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2}=-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(y,t)}{\partial t}\Rightarrow T(y,t)=\sum_{m=1}^{m=+\infty}A_m\{\beta_1 Sin(v_m(y-b_1))-\alpha_1 v_m Cos(v_m(y-b_1))\}e^{-\delta v_m{}^2 t}$$

$$\beta_1 T(y,t)-\alpha_1\left.\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\right|_{y=b_1}=0 \quad \beta_2 T(y,t)+\alpha_2\left.\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\right|_{y=b_2}$$

$$\beta_2\{\beta_1 Sin(v(b_2-b_1))+\alpha_1 v Cos(v(b_2-b_1))\}+\alpha_2 v\{\beta_1 Cos(v(b_2-b_1))-\alpha_1 v Sin(v(b_2-b_1))\}=0$$

$$\Leftrightarrow(\alpha_1\alpha_2 v^2-\beta_1\beta_2)Sin(v(b_2-b_1))=v(\beta_2\alpha_1+\alpha_2\beta_1)Cos(v(b_2-b_1))$$

$$\Leftrightarrow(\alpha_1\alpha_2 v^2-\beta_1\beta_2)Tan(v(b_2-b_1))=v(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$$

Voyons la simplification de l'équation déterminantale et comme auparavant on utilise l'expansion au premier terme de Goldstein des fonctions radiales (voir A.Erdelyi, H.Bateman-HIGHER_TRANSCENDENTAL_FUNCTIONS_VOL_III, formule 7 section 16.7 page 127 pour la fonction Je, ainsi que MachLaclan Theory and Application of Mathieu Functions, additionnal results 6, page 385, formules (1,2) pour les fonctions Je et Ne) :

$$J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta c Je_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}Je_{2p}{}'(\eta,q)I_{2p,2n}(\eta,q) \quad N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\left(\beta c Ne_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}Ne_{2p}{}'(\eta,q)I_{2p,2n}(\eta,q)\right)$$

$$\mathbf{It}(\eta,q)=\left[I_{2p,2n}(\eta,q)\right] \quad \mathbf{J}^{diag}(\eta,q)=\left[Je_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}\right] \quad \mathbf{J}'^{diag}(\eta,q)=\left[Je_{2p}{}'(\eta,q)\delta_{n,p}\right] \quad \mathbf{N}^{diag}(\eta,q)=\left[Ne_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}\right] \quad \mathbf{N}'^{diag}(\eta,q)=\left[Ne_{2p}{}'(\eta,q)\delta_{n,p}\right]$$

$$\mathbf{J}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta c\mathbf{J}^{diag}(\eta,q)+\alpha\sqrt{2}\mathbf{J}'^{diag}(\eta,q).\mathbf{It}(\eta,q) \quad \mathbf{N}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta c\mathbf{N}^{diag}(\eta,q)+\alpha\sqrt{2}\mathbf{N}'^{diag}(\eta,q).\mathbf{It}(\eta,q)$$

$$I_{2p,2n}(\eta,q)\approx\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{Sin(\theta)}\approx\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)\approx\frac{\delta_{n,p}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\left(\beta c Je_{2p}(\eta,q)+\alpha Je_{2p}{}'(\eta,q)\right)\delta_{n,p} \quad N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\left(\beta c Ne_{2p}(\eta,q)+\alpha Ne_{2p}{}'(\eta,q)\right)\delta_{n,p}$$

$$q>>0 \quad \begin{cases} Je_n(x,q)\approx\dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) & Ne_n(x,q)\approx\dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) \\ Je_n{}'(x,q)\approx -ce_n(0,q)2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) & Ne_n{}'(x,q)\approx ce_n(0,q)2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\end{cases}$$

$$Posons \quad q=\frac{v^2c^2}{4}\Rightarrow 2\sqrt{q}=vc \quad et \quad 2\sqrt{q}\frac{b_1}{a_2}\approx vb_1 \quad et \quad 2\sqrt{q}\frac{b_2}{a_2}\approx vb_2 \quad et \quad y=cSinh(\eta) \quad et \quad A_{2p}=A_{2p}(q)\neq 0 \quad \forall q$$

$$\Rightarrow\begin{cases} J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx A_n\delta_{n,p}c(\beta Cos(vy)-\alpha v Sin(vy)) \\ N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx A_n\delta_{n,p}c(\beta Sin(vy)+\alpha v Cos(vy))\end{cases} \quad b_1=cSinh(\eta_1) \quad b_2=cSinh(\eta_2) \quad c>>0\Rightarrow\begin{cases}\eta_1\approx 0\\ \eta_2\approx 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}Cosh(\eta_1)\approx 1\\ Cosh(\eta_2)\approx 1\end{cases} \quad A_n\approx ce_n(0,q)$$

$$\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}=0\Leftrightarrow\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}=0$$

$$\Leftrightarrow Det(\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)-\mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1))=0$$

$$\Leftrightarrow(\beta_1 Cos(vb_1)+\alpha_1 v Sin(vb_1))(\beta_2 Sin(vb_2)+\alpha_2 v Cos(vb_2))=(\beta_2 Cos(vb_2)-\alpha_2 v Sin(vb_2))(\beta_1 Sin(vb_1)-\alpha_1 v Cos(vb_1))$$

$$\Leftrightarrow(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2 v^2)(Sin(vb_2)Cos(vb_1)-Cos(vb_2)Sin(vb_1))=-v(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)(Cos(vb_1)Cos(vb_2)+Sin(vb_2)Sin(vb_1))$$

$$\Leftrightarrow(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2 v^2)Sin(v(b_2-b_1))=-v(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)Cos(v(b_2-b_1))$$

$$\Leftrightarrow(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2 v^2)Tan(v(b_2-b_1))=-v(\alpha_1\beta_2+\beta_1\alpha_2)$$

C'est bien la même équation transcendantale.

<u>Valeurs approchées asymptotiques des racines de l'équation déterminantale pour le problème de Robin bilatéral</u>

En revenant à l'équation déterminantale de départ et en supposant que l'on recherche les valeurs asymptotiques du paramètre q (ou v), on peut utiliser le même procédé de calcul avec les approximations de Goldstein, que l'on peut également affiner en argument des fonctions sinusoïdales. C'est un calcul tout à fait similaire qui conduit à considérer des matrices principalement diagonales (attention prise en compte différente de l'intégrale des fonctions angulaires de Mathieu) :

$$J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\left(\beta c Je_{2p}(\eta,q)+\frac{\alpha Je_{2p}'(\eta,q)}{Cosh(\eta)}\right)\delta_{n,p}\quad N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\left(\beta c Ne_{2p}(\eta,q)+\frac{\alpha Ne_{2p}'(\eta,q)}{Cosh(\eta)}\right)\delta_{n,p}$$

$$q>>0\quad\begin{cases}Je_n(x,q)\approx\dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right)\\ Ne_n(x,q)\approx\dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right)\\ Je_n'(x,q)\approx-ce_n(0,q)2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right)\\ Ne_n'(x,q)\approx ce_n(0,q)2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)-(2n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)\right)\end{cases}\qquad Posons\quad q=\frac{v^2c^2}{4}\Rightarrow 2\sqrt{q}=vc$$

$$\Rightarrow\begin{cases}J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(\eta)}}\delta_{n,p}c\left(\beta Cos\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)-\alpha v Sin\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)\right)\\ N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(\eta)}}\delta_{n,p}c\left(\beta Sin\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)+\alpha v Cos\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)\right)\end{cases}$$

$$Posons\quad\gamma(v,\eta)=vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)$$

$$\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}=0\Leftrightarrow\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{E}(\eta_1,\eta_2,q,\beta_1,\alpha_1,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(\beta_1Cos(\gamma(v,\eta_1))+\alpha_1v\,Sin(v,\eta_1))(\beta_2Sin(\gamma(v,\eta_2))+\alpha_2v\,Cos(\gamma(v,\eta_2)))=\\ =(\beta_2Cos(\gamma(v,\eta_2))-\alpha_2v\,Sin(\gamma(v,\eta_2)))(\beta_1Sin(\gamma(v,\eta_1))-\alpha_1v\,Cos(\gamma(v,\eta_1)))\end{cases}\Leftrightarrow(\beta_1\beta_2-\alpha_1\alpha_2v^2)Tan(\gamma(v,\eta_2)-\gamma(v,\eta_1))=-v(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$$

Les valeurs approchées des grandes racines de l'équation déterminantale pour le problème de Robin bilatéral sont donc celles de l'équation transcendantale plus simple :

$$v\frac{(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)}{(\alpha_1\alpha_2v^2-\beta_1\beta_2)}=Tan\left(vc(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)$$

Mise à l'échelle des coefficients matriciels

De part la construction du déterminant dès qu'un coefficient est plus grand que l'unité par effet multiplicateur la fonction déterminantale à tendance à diverger.

$$J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cJe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Je_{2p}'(\eta,q)$$
$$N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\beta cNe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Ne_{2p}'(\eta,q)$$
$$\mathbf{J}(\eta,q,\beta,\alpha)=\left[J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\right]\quad \mathbf{N}(\eta,q,\beta,\alpha)=\left[N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\right]$$
$$\begin{cases}\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{A}+\mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1).\mathbf{B}=0\\ \mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{A}+\mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2).\mathbf{B}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1) & \mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)\\ \mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2) & \mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{B}\end{bmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow Det\begin{bmatrix}\mathbf{J}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1) & \mathbf{N}(\eta_1,q,\beta_1,-\alpha_1)\\ \mathbf{J}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2) & \mathbf{N}(\eta_2,q,\beta_2,\alpha_2)\end{bmatrix}=0$$

Selon l'expression asymptotiques de Goldstein pour un paramètre q grand, les coefficients étant de la forme :

$$\begin{cases}J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(\eta)}}\delta_{n,p}c\left(\beta Cos\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)-\alpha\dfrac{2\sqrt{q}}{c}Sin\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)\right)\\ N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\dfrac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(\eta)}}\delta_{n,p}c\left(\beta Sin\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)+\alpha\dfrac{2\sqrt{q}}{c}Cos\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)\right)\end{cases}$$

Ces coefficients peuvent être rééchelonnés de manière à ne pas dépasser la valeur 1, autant que faire se peut :

$$\begin{cases}\tilde{J}_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)}}{c\times ce_n(0,q)}J_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\delta_{n,p}\left(\beta Cos\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)-\alpha\dfrac{2\sqrt{q}}{c}Sin\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)\right)\\ \tilde{N}_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\dfrac{\sqrt{Cosh(\eta)}}{c\times ce_n(0,q)}N_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\approx\delta_{n,p}\left(\beta Sin\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)+\alpha\dfrac{2\sqrt{q}}{c}Cos\left(vcSinh(\eta)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)\right)\right)\end{cases}$$
$$\Rightarrow\tilde{J}_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\le|\beta|+|\alpha|\frac{2\sqrt{q}}{c}\qquad \tilde{N}_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)\le|\beta|+|\alpha|\frac{2\sqrt{q}}{c}$$

Il peut être donc utile d'utiliser des valeurs rééchelonnées des fonctions radiales bornées à 1 lorsque q est grand :

$$\tilde{J}_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)}}{ce_n(0,q)\left(|\beta|c+2|\alpha|\sqrt{q}\right)}\left\{\beta cJe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Je_{2p}'(\eta,q)\right\}$$
$$\tilde{N}_{2n,2p}(\eta,q,\beta,\alpha)=\frac{\sqrt{Cosh(\eta)}}{ce_n(0,q)\left(|\beta|c+2|\alpha|\sqrt{q}\right)}\left\{\beta cNe_{2p}(\eta,q)\delta_{n,p}+\alpha\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta,q)Ne_{2p}'(\eta,q)\right\}$$

<u>*Scénario de résolution de l'équation déterminantale convection bilatérale*</u>

Tout comme la convection unilatérale, on détermine les racines de l'équation déterminantale pour une dimension finie N. Le principe de résolution consiste à examiner la convergence des racines successivement obtenues par l'agrandissement du déterminant fini en commençant par une ligne et une colonne pour chaque sous-matrice et en agrandissant successivement le déterminant. On détermine numériquement les racines à l'étape 0, puis à l'étape 1, ainsi de suite, et l'on constate que les racines successives convergent rapidement vers une solution. Pour déterminer l'appartenance du spectre de valeurs propres aux indices 2n et m, il suffit de partir du déterminant simplifié à la diagonale principale pour chaque sous-matrice. Cela devient alors une simple équation transcendantale pour chaque valeur de n et qui par résolution numérique donne les valeurs approximatives autour desquelles la convergence s'effectue et par retour permet d'identifier la valeur de n et m dans la résolution approchée de l'équation déterminantale. Le schéma pourrait se présenter ainsi :

$$\mathbf{J}_1 = \left[J^1_{2n,2p}\right] \leftarrow J^1_{2n,2p} = \beta_1 c Je_{2p}(\eta_1,q)\delta_{n,p} - \alpha_1\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_1,q)$$
$$\mathbf{J}_2 = \left[J^2_{2n,2p}\right] \leftarrow J^2_{2n,2p} = \beta_2 c Je_{2p}(\eta_2,q)\delta_{n,p} + \alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)$$
$$\mathbf{N}_1 = \left[N^1_{2n,2p}\right] \leftarrow N^1_{2n,2p} = \beta_1 c Ne_{2p}(\eta_1,q)\delta_{n,p} - \alpha_1\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_1,q)$$
$$\mathbf{N}_2 = \left[N^2_{2n,2p}\right] \leftarrow N^2_{2n,2p} = \beta_2 c Ne_{2p}(\eta_2,q)\delta_{n,p} + \alpha_2\sqrt{2}I_{2p,2n}(\eta_2,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)$$

$$\textit{Repérage des indices} \quad \Delta_d = \begin{vmatrix} \mathbf{J}_1^{Diag} & \mathbf{N}_1^{Diag} \\ \mathbf{J}_2^{Diag} & \mathbf{N}_2^{Diag} \end{vmatrix} = \left|\mathbf{J}_1^{Diag}\mathbf{N}_2^{Diag} - \mathbf{J}_2^{Diag}\mathbf{N}_1^{Diag}\right| = \begin{cases} n=0 \rightarrow J^1_{0,0}N^2_{0,0} - J^2_{0,0}N^1_{0,0} = 0 \rightarrow q^{(1)}_{0,m} \\ n=1 \rightarrow J^1_{2,2}N^2_{2,2} - J^2_{2,2}N^1_{2,2} = 0 \rightarrow q^{(1)}_{2,m} \\ n=2 \rightarrow J^1_{4,4}N^2_{4,4} - J^2_{4,4}N^1_{4,4} = 0 \rightarrow q^{(1)}_{4,m} \\ \ldots \end{cases}$$

$$\textit{Schéma numérique de résolution} \quad Det\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} J^1_{0,0} & N^1_{0,0} \\ J^2_{0,0} & N^2_{0,0} \end{vmatrix} = 0 = J^1_{0,0}N^2_{0,0} - J^2_{0,0}N^1_{0,0} = 0 \rightarrow q^{(1)}_{0,m} \qquad \rightarrow \Delta^{(2)} = \begin{vmatrix} J^1_{0,0} & J^1_{0,2} & N^1_{0,0} & N^1_{0,2} \\ J^1_{2,0} & J^1_{2,2} & N^1_{2,0} & N^1_{2,2} \\ J^2_{0,0} & J^2_{0,2} & N^2_{0,0} & N^2_{0,2} \\ J^2_{2,0} & J^2_{2,2} & N^2_{2,0} & N^2_{2,2} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} q^{(2)}_{0,m} \\ q^{(2)}_{2,m} \end{cases}$$

$$\rightarrow \Delta^{(3)} = \begin{vmatrix} J^1_{0,0} & J^1_{0,2} & J^1_{0,4} & N^1_{0,0} & N^1_{0,2} & N^1_{0,4} \\ J^1_{2,0} & J^1_{2,2} & J^1_{4,4} & N^1_{2,0} & N^1_{2,2} & N^1_{4,4} \\ J^1_{4,0} & J^1_{4,2} & J^1_{4,4} & N^1_{4,0} & N^1_{4,2} & N^1_{4,4} \\ J^2_{0,0} & J^2_{0,2} & J^2_{0,4} & N^1_{0,0} & N^1_{0,2} & N^1_{0,4} \\ J^2_{2,0} & J^2_{2,2} & J^2_{4,4} & N^1_{2,0} & N^1_{2,2} & N^1_{4,4} \\ J^2_{4,0} & J^2_{4,2} & J^2_{4,4} & N^1_{4,0} & N^1_{4,2} & N^1_{4,4} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} q^{(3)}_{0,m} \\ q^{(3)}_{2,m} \rightarrow \ldots \\ q^{(3)}_{4,m} \end{cases} \quad \textit{Les suites} \quad \begin{cases} q^{(1)}_{0,m}, q^{(2)}_{0,m}, q^{(3)}_{0,m}, \ldots \\ q^{(1)}_{2,m}, q^{(2)}_{2,m}, q^{(3)}_{2,m}, \ldots \\ q^{(1)}_{0,m}, q^{(2)}_{0,m}, q^{(3)}_{0,m}, \ldots \\ \ldots. \end{cases} \quad \textit{sont convergentes}$$

Problème aux limites avec conditions initiales pour l' équation de la chaleur (diffusion) – p

Liste des premières valeurs propres pour un problème aux limites par convection bilatérale

Voici les tableaux des 13 premières valeurs propres du problème aux limites Robin homogène bilatéral, pour les paramètres géométriques suivants du cylindre elliptique creux : a2=4, b2=1, b1=2b2/10=0.2, c=√15, η2=ArcCosh(a2/c)=0.255413, η1=ArcSinh(b1/c)=0.0516169, a1=c Cosh(η1)=3.87814. Diverses valeurs des coefficients d'échange thermique h1 et h2 sont données.

h1=β1/α1=0 h2=β2/α2	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3
Neumann h2=0	0	0.8600685239343296	1.6334815728700829	2.4018460421812278	3.168111981482076	3.9332232673113277	4.0484636109901 22	4.5725334056421865	5.123766119039874	5.6990168770850 13	6.2953591162938505	6.910149688676589	7.977634642318701
h2=1	1.09148938596433 42	1.5673933612320774	2.1430104745565024	2.7894627738387983	3.478299047663964	4.171410595757374	4.33655450566951	4.844328487912837	5.379540993158248	5.9393292031391205	6.524809078254249	7.121069785884158	8.135323752 82042
h2=2	1.37433373710914 42	1.8624691662 5136	2.4244900840257166	3.0413450738034427	3.698018137359402	4.364021041923817	4.57218179126144	5.070629664464404	5.595863262464865	6.145399626653144	6.716769280280126	7.3069472326576195	8.278547808183934
h2=10	1.879414 93067396 6	2.4085073861535524	2.9914433860815506	3.614885017798720	4.267537367872257	4.943993213625238	5.405533007023424	5.901911371919617	6.419723661057808	6.957462365954145	7.513604603843455	8.090027136 54803	9.029962003344973
h2=50	2.053554 80555626	2.6010294952066895	3.197927153 0143185	3.832540854 8298805	4.495361742675789	5.179322711457004	5.875646803 8877365	6.388185214 9470575	6.920195757060147	7.470213236966205	8.036803629 64302	8.619017150674784	9.707300184 75839
h2=100	2.077937 74046478 2	2.6280340395 19018	3.227009352 1205054	3.863312043894354	4.527619481839332	5.212848192953277	5.946891880 43532	6.462394806967231	6.997189679522644	7.549815982917918	8.118847954867913	8.703036038 39995	9.823964567105461`
Dirichlet h2=∞	2.102929 24236320 73	2.655706558161065	3.256818387687341	3.894858619599079	4.560677995773735	5.247285645938626	6.020348393909924	6.538932320561933	7.076635043201417	7.632001463293423	8.203614902150273	8.790120379418912	9.945625632696759

h1=β1/α1=1 h2=β2/α2	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3
Neumann h2=0	1.069303 97245668 2	1.5069194677868734	2.057010521 7652808	2.699079842 1428486	3.389677374445121	4.053841998 62596	4.336255521 030538	4.845062511982102	5.381495376 53901	5.942677479370074	6.525837820489225	7.124865162898732	8.131844795272515
h2=1	1.590220 66610024 67	2.060781088 4240987	2.596239274859748	3.169459118 3992467	3.769989248 5891975	4.299080726338179	4.592399320 0653985	5.089046410 8044196	5.612954299 31427	6.161758554863602,	6.732908604904432	7.319840959972645	8.280815796858008
h2=2	1.834489 91906934 96	2.294702349268508	2.813811654 3831218,	3.398652407 47736	4.022869881898274	4.534412325704692	4.808221371460748	5.297663189859759	5.813277042 7350575	6.353500073066183	6.915931869762347	7.495854928 87826	8.420844448737594
h2=10	2.349401 83358148 46	2.825659623 7325047	3.365675099 4378792	3.949643625655671	4.573383395935423	5.189288585573116	5.608715524222566	6.097262355 1589855	6.607450952420469	7.137957795093683	7.687179298581092	8.255823352761668	9.158055023 14304
h2=50	2.519802 63701606 55	3.028693709546788	3.582458563 1893138	4.176782719 89527	4.807288706 5434635	5.435852134853869	6.076942603 457573	6.581490660421625	7.105980971 13283	7.648350188217866	8.208286640617844	8.780994533 115008	9.832193558 460357
h2=100	2.548160 38464223 1	3.055121244795259	3.613168235 6239985	4.209710123819158	4.841004284548648	5.471035523576286	6.148027130407887	6.655806779371627	7.183017483 53349	7.728420018 22344	8.290582772223612	8.864637995 81945	9.948894895 434952
Dirichlet h2=∞	2.573939 90684959 9	3.083039044 6281433	3.640945658 1007085	4.239134069262157	4.869529970 9905715	5.512309782382951	6.221489097368175	6.732282293 96942	7.262387066 3772285	7.810408465325529	8.374972228609296	8.953246708497186	10.07011614 5752216

h1=β1/α1=2 h2=β2/α2	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3
Neumann h2=0	1.350690 4738765 562	1.8087065129332265	2.325026595 9202205	2.908288281 2568975	3.546805292 4397786	4.159283750230086	4.570915992502574	5.070791618531076	5.597753104480507	6.149304156134605	6.722950183639332	7.313422888246198	8.276315464360213
h2=1	1.840212 7405537 942	2.282221489 2547135	2.798234276 49366	3.369448532 007637	3.976024334721546	4.435261896235463	4.807533037465934	5.296983428399816	5.813438209309498	6.354671662675214	6.917835820928728	7.498463073 4614885	8.420761493092135
h2=2	2.085809 5019995 88	2.529877814543635	3.035687438214009	3.595842653335052	4.205092974 35475	4.727067532038807	5.010361249438614	5.493499101621568	6.002959836 47944	6.536349771103737	7.092023716253458	7.666990000 20792	8.556427899090611
h2=10	2.618884 8928960 67	3.091025588 5572857	3.613054683817927	4.175937391334506	4.775537772 3071915	5.394872750742146	5.788422957 46855	6.271407159020028	6.775837866756144	7.300255256789741	7.843550563174538	8.409098514 987827	9.280351038668092
h2=50	2.819823 7199919 878	3.308534460 9544087	3.843660535 0195028	4.419772772515921	5.027837096 4277865	5.649914585895363	6.256661171864667	6.755728950863684	7.273945580006859	7.810767332388842	8.364638829878587	8.932111860 753954	9.951309117126307
h2=100	2.846745 2536318 905	3.337783142608511	3.876877344534853	4.453679111488256	5.064077069882614	5.686549686587419	6.328223442027508	6.830175765 6940305	7.351097741 8056465	7.890863684314941	8.447226228424539	9.016029490 55129	10.06812083 3707455
Dirichlet h2=∞	2.871573 8855575 736	3.367622544 4200156	3.908126458 29705	4.487039275024213	5.098013983886965	5.727832095859684	6.402132864314611	6.907071125260652	7.431262836840186	7.973402726291639	8.532188063588492	9.104672016 671682	10.18933379 2952628

Problème aux limites avec conditions initiales pour l' équation de la chaleur (diffusion) – p

h1=β1/α1=10 h2=β2/α2	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3
Neumann h2=0	1.8519777917321442	2.3641023464006525	2.922112618219637	3.508156713547685	4.102493761412259	4.714833397529165	5.39921654002363	5.895998135060667	6.414455427524424	6.953107941886311	7.5104547964186	8.088944514835399	9.027386917935596
h2=1	2.32857455806845434	2.8024480004589942	3.3261312713160 61	3.8933284746558874	4.5104425758145945	5.0756725288089966	5.603157043591541	6.091554673339467	6.601650426750582	7.1321760182526805	7.681825398435542	8.252082575550075	9.155875289605122
h2=2	2.61014808684313 95	3.07423881346528	3.5864997630766884	4.136884882331056	4.723107812121084	5.326835106999307	5.783683129109344	6.266189000337656	6.77021193743121	7.293940912223403	7.836926631644208	8.403839888817513	9.278124939550448
h2=10	3.281892 44981894 43	3.7611896579625386	4.277912299835977	4.824851327638686	5.399350364807534	6.0129747008282495	6.543200281721007	7.020706139129975	7.517021136857274	8.030936144840846	8.561756960136428	9.120618304667174	9.956682229378899
h2=50	3.553336 95656221 3	4.050741494877395	4.580805544948164	5.139493941 8424475	5.724017581516792	6.336329200 90207	7.047204093827525	7.538150548802311	8.046301666855701	8.570754201175411	9.110394012824722	9.669461554681773	10.63220822 5129007
h2=100	3.591147 38902141 63	4.092140314 7787	4.624203050349907	5.185346655436193	5.771295825000653	6.383727853352478	7.125979369 50278	7.619645550600974	8.130417005224233	8.657246304 17601	9.199404836010386	9.759128350303806	10.75250594 9371495
Dirichlet h2=∞	3.629598 47335746 13	4.133601566049838	4.668793077 31413	5.231850869094859	5.819488732595894	6.433207980202812	7.207018695975533	7.703904409296227	8.217536722 76333	8.747059630 33033	9.291594264638224	9.852882695605162	10.87795908 6623571

h1=β1/α1=50 h2=β2/α2	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3
Neumann h2=0	2.025570 19803328 05	2.557160172 8448186	3.133854452 3887224	3.743692326970288	4.376440642877096	5.025187084517397	5.867446999282233	6.378978020986514	6.909945685904255	7.458898765 0126475	8.024418445106942	8.605640453992622	9.702615970 432175
h2=1	2.508697 95183333 54	2.999195731 4613362	3.538663038958586	4.116829590679014	4.733285659152955	5.329937494156916	6.069143186 46211	6.572466525670025	7.095111044809875	7.636418620 766591	8.194445971 76533	8.765636231 78345	9.827771185 6017
h2=2	2.806613 09501153 24	3.288550152 3845537	3.812493767 1225765	4.373579135 2805995	4.966272306751885	5.570884496422585	6.249808555444695	6.746887474013897	7.263642582313968	7.798497735 749449	8.349722034663731	8.916125635 5611	9.946520232 772889
h2=10	3.550433 21317776 83	4.047076690518133	4.573913946977634	5.129421501777255	5.709026318689612	6.315822044780433	7.044869592707561	7.534666448 59713	8.041349428974641	8.564041930 174373	9.101974333679493	9.658638484 57967	10.62980924 574404
h2=50	3.868095 09701000 56	4.382271640764316	4.925431309452607	5.494044575402569	6.084686128838766	6.696044730436415	7.607649518940853	8.110795843376957	8.628387870088712	9.161022179 173772	9.707275226674618	10.26772951 8049089	11.35326609 6559285
h2=100	3.913141 03970682 94	4.430614681931473	4.976476712771353	5.547132254571629	6.140305571103967	6.752869352030501	7.697366103050181	8.203056193263384	8.723879654 68149	9.258921985 15554	9.807596153 47376	10.36994952 1464546	11.48549055 8653883
Dirichlet h2=∞	3.959777 68887935 9	4.480412296606796	5.029019253 4873785	5.602355465543803	6.197364735333115	6.811702881956614	7.790132367405424	8.298933033 84769	8.822719187 43873	9.360667440 710442	9.911960291723142	10.47628813 6444735	11.62405375 6566315

h1=β1/α1=100 h2=β2/α2	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3
Neumann h2=0	2.04993 9744009 2926	2.584256661390432	3.163391671 8826978	3.775823658 1251547	4.411990013043204	5.064518088782568	5.938567951700818	6.452856069072184	6.986359844332995	7.537629924868646	8.105252835572129	8.688011498046807	9.819108621 796246
h2=1	2.53629 7872910 137	3.027023584475403	3.569053243592587	4.148907762715932	4.766046066409179	5.365864789109964	6.140361248540967	6.646742057753717	7.171887043 0015995	7.715389320 260917	8.275381573414588	8.848106484 904823	9.943886417 045677
h2=2	2.83603 9244946 24	3.318742947194727	3.844929860244616	4.407630966410366	5.002227511494395	5.606492177612546	6.321477534278958	6.821382913986909	7.340629754319224	7.877712213 011384	8.430948230818565	8.998821610 249175	10.06328422 8972822
h2=10	3.58999 3993148 0582	4.087348830531342	4.616752820226904	5.173916618 3397485	5.754475886634061	6.361190601526643	7.123245842746849	7.615866555 42873	8.124928429796842	8.649927313 605572	9.189709768510967	9.746630368 094328	10.75014785 4023293
h2=50	3.91347 0476876 2227	4.430310285299077	4.975427963588502	5.546078410653011	6.138542682991385	6.750727082285154	7.697384991686404	8.202617969285239	8.723177222949902	9.258145084 618947	9.806345240968495	10.36837271 8157351	11.48545503 4270322
h2=100	3.96017 5453075 3666	4.479932178346766	5.028163220971895	5.601035701 91927	6.195476749415471	6.809149743517591	7.789312735126278	8.297463793158913	8.820895054264982	9.358300132 29622	9.909130135285523	10.47266792 3995187	11.62031157 115165
Dirichlet h2=∞	4.00762 1118682 493	4.530936845550383	5.081890728963092	5.657253362 77805	6.253992212852875	6.869465357 59233	7.884163122205401	8.395691495042398	8.922032063 40622	9.462361097 078935	10.01586243 6864404	10.58187557 292349	11.76244668 0728088

Problème aux limites avec conditions initiales pour l' équation de la chaleur (diffusion) – p

h1=β1/α1=∞ h2=β2/α2	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3
Neumann h2=0	2.07493582271774 77	2.61203819952032	3.1936368358786984	3.8085696782214233	4.447793306818448	5.104167360581388	6.0119505801197874	6.5291161513565665	7.065285338083375	7.619011838546697	8.188888983005159	8.773572525401054	9.940676166731492
h2=1	2.5571576710841 9 7	3.0545744970966333	3.5973199420570463	4.176966089228437	4.78545618405285	5.408510372903402	6.213698045797909	6.722655597908229	7.250754340291146	7.796610539281871	8.358862281903177	8.93495728290373	10.065286235848097
h2=2	2.86028037025779 72	3.347368498724397	3.8759966973182234	4.440054673100087	5.033350865488068	5.64699659960503	6.395132544261815	6.897985206810644	7.419876935717397	7.959514195454687	8.515608337980328	9.085501563042067	10.18469926543731
h2=10	3.62768733643361	4.129056283571427	4.660748048517281	5.219340285200603	5.801485988040184	6.408581212163509	7.204544090593428	7.699711028070052	8.211377580118995	8.738683407064402	9.280749469959638	9.83898789124859	10.875441593012143
h2=50	3.959595 04618446 93	4.479722951249914	5.027673073512091	5.600189259231679	6.1942036869224	6.807315506626785	7.789890233616817	8.29825040670293	8.821528856817316	9.358899069 99334	9.909540496075119	10.473079209445665	11.623752777263892
h2=100	4.007547 70707209 75	4.530614271140063	5.081246667615843	5.656209833204805	6.2524664290054766	6.867356622601294	7.8840753016595135	8.395383668945822	8.921470966490226	9.461511968 00147	10.01468911199629	10.58032292450587	11.76234258423788
Dirichlet h2=∞	4.056808 73562367 3	4.582894486773889	5.136293351566075	5.713791591748811	6.312382210373066	6.929332467265208	7.981671465147845	8.496092216 99283	9.025162153579807	9.568058038577696	10.123966119339658	10.692091305197334	11.907979798493512

<u>Expression de la solution générale du problème aux limites de Robin homogène bilatéral sur le cylindre elliptique creux</u>

<u>à finir donner la solution</u>

Etude d'un problème transitoire de diffusion en coordonnées elliptiques avec conditions aux limites de Robin et de Neumann: cylindre creux de longueur infinie de section elliptique soumis à une condition initiale de température fixe T_0, et une condition aux limites de Robin homogènes de température sur la surface extérieure et une condition homogène de Neumann sur la surface intérieure, problème de refroidissement

Le régime transitoire est solution du problème suivant :

$$\Delta T_t(\eta,\theta,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial t}=0 \quad C.L. \quad \left.\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_1}=0 \quad \left.\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}+\beta\, T_t(\eta,\theta,t)\right|_{\eta=\eta_2}=0 \quad C.I \quad T_t(\eta,\theta,0)=T_0$$

D'après les propriétés des fonctions de Mathieu périodiques. La solution complète est à rechercher sous la forme d'une série, la multiplicité des valeurs propres du problème aux limites est fonction des conditions aux limites homogènes. La décomposition est logiquement à double indice, un indice n lié à la décomposition en fonctions angulaire périodique de Mathieu , et un indice lié aux valeurs propres $q_{n,m}$ obtenu d'après le respect des conditions aux limites homogènes sur la surface pour chaque indice n :

$$U_{2n,m}(\eta,\theta)=\left\{Ne_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta,t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})e^{-\delta\frac{4q_{2n,m}}{c^2}t}$$

Les calculs sont tout à fait similaires à l'exemple précédent. Il vient un système d'équations linéaires, résultat obtenu par K.Sato , dans l'article de 2007 « Transient Heat conduction in Infinite Hollow Confocal Elliptical cylinder ». En théorie pour avoir une solution non triviale (nulle) des coefficient B_{2n} , il faut que le déterminant infini soit nul :

$$\text{Indice de Kronecker} \quad \delta_{i,j} \quad G_l\left(\eta,\frac{1}{2}\right)==\frac{2\sqrt{2}}{\pi(1+\partial_{l,0})}Q_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \quad \Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)(1+\delta_{l+j,0})+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)(1+\delta_{|l-j|,0})\right\}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{p=\infty}\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\frac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_2))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\end{array}\right\}B_{2p}=0 \qquad et \qquad h=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\left\{\begin{array}{l}E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\frac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}\end{array}\right\}\\ E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\frac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_2))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\end{array}\right\}\end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta=\begin{vmatrix}E_{0,0} & E_{0,2} & E_{0,4} & \dots & \dots\\ E_{2,0} & E_{2,2} & E_{2,4} & \dots & \dots\\ E_{4,0} & E_{4,2} & E_{4,4} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}=0$$

Selon le modèle géométrique de deux ellipses inscrites l'une dans l'autre de grand axe a1,a2 et de petit axe b1,b2, nous avons :

$$Ellipse\ grand\ axe\ a_2\ ,\ petit\ axe\ b_2 \Rightarrow c=\sqrt{a_2{}^2-b_2{}^2} \quad a_2=cCosh(\eta_2) \quad b_2=cSinh(\eta_2)\Rightarrow \eta_2=ArcCosh\left(\frac{a_2}{c}\right)$$

$$Ellipse\ grand\ axe\ a_1\ ,\ petit\ axe\ b_1 \Rightarrow a_1=cCosh(\eta_1) \quad b_1=cSinh(\eta_1)\Rightarrow \eta_1=ArcCosh\left(\frac{a_1}{c}\right) \qquad c=b_2\sqrt{\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1}$$

$$Supposons \quad \frac{a_2}{b_2},\frac{b_1}{b_2},b_2 \quad connus \quad comme \quad a_2{}^2-b_2{}^2=a_1{}^2-b_1{}^2 \Rightarrow a_1=\sqrt{a_2{}^2-b_2{}^2+b_1{}^2}=b_2\sqrt{\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1+\frac{b_1{}^2}{b_2{}^2}}$$

$$Posons \quad q=\frac{c^2v^2}{4}\Rightarrow q=\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta\, c\left\{Ne_{2p}'\left(\eta_1,\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)\right)Je_{2p}\left(\eta_2,\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)\right)-Je_{2p}'\left(\eta_1,\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)\right)Ne_{2p}\left(\eta_2,\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)\right)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\frac{4\alpha}{\pi}\left[\begin{array}{l}\left\{Ne_{2p}'\left(\eta_1,\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)\right)Je_{2p}'\left(\eta_2,\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)\right)-Je_{2p}'\left(\eta_1,\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)\right)Ne_{2p}'\left(\eta_2,\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)\right)\right\}\times\\ \times\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_2))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}\left(\frac{v^2b_2{}^2}{4}\left(\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1\right)\right)\end{array}\right]\end{array}\right\}$$

<u>*Cas limites permettant la simplification de l'équation déterminantale*</u>

<u>*Condition homogène de Dirichlet*</u>

Pour une condition homogène de type Dirichlet le paramètre α est nulle, seule les termes diagonaux subsiste, et la condition de nullité du déterminant se réduit à celle des termes diagonaux, soit : $Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)=Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)$*. Le spectre des valeurs du paramètre q est donc celui respectant cette équation transcendantale.*

<u>*Condition homogène de Neumann*</u>

Lorsqu'il s'agit d'une conditions aux limites de Neumann, alors c'est le paramètre β qui est nulle, conduisant à l'équation déterminantale:

$$E_{2n,2p}=\frac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_2))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)$$

$$=\frac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}C_{2n,2p}$$

$$C_{2n,2p}=\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\Rightarrow\Delta=0\Leftrightarrow\Delta=\left\{\prod_{l=0}^{+\infty}\left\{Ne_{2l}'(\eta_1,q)Je_{2l}'(\eta_2,q)-Je_{2l}'(\eta_1,q)Ne_{2l}'(\eta_2,q)\right\}\right\}\begin{vmatrix}C_{0,0} & C_{0,2} & C_{0,4} & \dots & \dots\\ C_{2,0} & C_{2,2} & C_{2,4} & \dots & \dots\\ C_{4,0} & C_{4,2} & C_{4,4} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow Ne_{2l}'(\eta_1,q)Je_{2l}'(\eta_2,q)=Je_{2l}'(\eta_1,q)Ne_{2l}'(\eta_2,q)$$

Ce qui est la condition de nullité de la dérivée première des fonctions radiales de Mathieu sur les deux bords de l'ellipse. Le spectre des valeurs du paramètre q est donc celui respectant cette équation transcendantale.

Problème aux limites avec conditions initiales pour l' équation de la chaleur (diffusion) – p

Dégénérescence vers une configuration circulaire

Lorsque l'ellipse dégénère en cercle, les formules de passage ont lieu :

$$Ellipse\ grand\ axe\ a_2\ ,\ petit\ axe\ b_2 \Rightarrow c=\sqrt{a_2{}^2-b_2{}^2} \quad a_2=cCosh(\eta_2) \quad b_2=cSinh(\eta_2)\Rightarrow \eta_2=ArcCosh\left(\frac{a_2}{c}\right)$$

$$Ellipse\ grand\ axe\ a_1\ ,\ petit\ axe\ b_1 \Rightarrow a_1=cCosh(\eta_1) \quad b_1=cSinh(\eta_1)\Rightarrow \eta_1=ArcCosh\left(\frac{a_1}{c}\right) \qquad c=b_2\sqrt{\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1}$$

$$a_{1,2}\to b_{1,2}\Rightarrow c\to 0 \quad et \quad \eta_{1,2}\to\infty \quad et \quad \begin{cases} cCosh(\eta)\to r \\ cSinh(\eta)\to r \end{cases} \Rightarrow c\frac{e^{\eta_{1,2}}}{2}\to r_{1,2}=a_{1,2}=b_{1,2}$$

$$\frac{ce^{\eta}}{2}\to r\Rightarrow \frac{c^2e^{2\eta}}{4}\to r^2 \quad \frac{dr}{d\eta}=r \qquad qe^{2\eta}\to v^2r^2\Rightarrow q\to\frac{c^2v^2}{4}\Rightarrow\frac{2\sqrt{q}}{c}\to v$$

$$ce_0(\vartheta,q)\to\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ce_{2n}(\vartheta,q)\to Cos(2n\vartheta) \quad Je_{2n}(\eta,q)\to p'_{2n}\,J_{2n}(vr) \quad Ne_{2n}(\eta,q)\to p'_{2n}\,Y_{2n}(vr) \quad p'_{2n} \quad se\ neutralise\ dans\ le\ développement$$

Si bien que l'équation déterminantale se simplifie grandement :

$$E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Je_{2p}(\eta_{1,2},q)\approx p'_{2n}\,J_{2n}(vr_{1,2}) \quad \dfrac{dJe_{2p}(\eta_{1,2},q)}{d\eta}=\dfrac{dJe_{2p}(\eta_{1,2},q)}{dr}\dfrac{dr}{d\eta}\approx p'_{2n}\,\dfrac{dJ_{2n}(vr)}{dr}r\Big|_{r=r_{1,2}} \\ Ne_{2p}(\eta_{1,2},q)\approx p'_{2n}\,Y_{2n}(vr_{1,2}) \quad \dfrac{dNe_{2p}(\eta_{1,2},q)}{d\eta}=\dfrac{dNe_{2p}(\eta_{1,2},q)}{dr}\dfrac{dr}{d\eta}\approx p'_{2n}\,\dfrac{dY_{2n}(vr)}{dr}r\Big|_{r=r_{1,2}}\end{array}\right. \quad \frac{r_{1,2}}{e^{\eta_{1,2}}}\approx\frac{c}{2} \quad \frac{1}{\sqrt{Cosh(2\eta_{1,2})}}\approx\frac{\sqrt{2}}{e^{\eta_{1,2}}}$$

$$\eta_{1,2}\to\infty\Rightarrow E_{2n,2p}\approx p'_{2n}c^2\left\{\begin{array}{l}\beta\left\{\dfrac{dY_{2n}(vr)}{dr}\Big|_{r=r_1}J_{2n}(vr_2)-\dfrac{dJ_{2n}(vr)}{dr}\Big|_{r=r_1}Y_{2n}(vr_2)\right\}+\\ \alpha\left\{\dfrac{dY_{2n}(vr)}{dr}\Big|_{r=r_1}\dfrac{dJ_{2n}(vr)}{dr}\Big|_{r=r_2}-\dfrac{dJ_{2n}(vr)}{dr}\Big|_{r=r_1}\dfrac{dY_{2n}(vr)}{dr}\Big|_{r=r_2}\right\}\end{array}\right\}\delta_{n,p}$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p}\approx p'_{2n}c^2v\left\{\beta\left\{Y_{2n}'(vr_1)J_{2n}(vr_2)-J_{2n}'(vr_1)Y_{2n}(vr_2)\right\}+\alpha v\left\{Y_{2n}'(vr_1)J_{2n}'(vr_2)-J_{2n}'(vr_1)Y_{2n}'(vr_2)\right\}\right\}\delta_{n,p}$$

$$Or \quad \left\{\begin{array}{l} J_{2n}'(x)=\dfrac{2n}{x}J_{2n}(x)-J_{2n+1}(x) \quad J_{2n}'(vb)=\dfrac{2n}{vb}J_{2n}(vb)-J_{2n+1}(vb) \\ Y_{2n}'(x)=\dfrac{2n}{x}Y_{2n}(x)-Y_{2n+1}(x) \quad Y_{2n}'(vb)=\dfrac{2n}{vb}Y_{2n}(vb)-Y_{2n+1}(vb)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p}\approx p'_{2n}c^2v\left\{\begin{array}{l}\beta\left\{J_{2n+1}(vr_1)Y_{2n}(vr_2)-Y_{2n+1}(vr_1)J_{2n}(vr_2)\right\}+\\ +\alpha v\left\{\left(\dfrac{2n}{vr_1}Y_{2n}(vr_1)-Y_{2n+1}(vr_1)\right)\left(\dfrac{2n}{vr_2}J_{2n}(vr_2)-J_{2n+1}(vr_2)\right)-\left(\dfrac{2n}{vr_2}Y_{2n}(vr_2)-Y_{2n+1}(vr_2)\right)\left(\dfrac{2n}{vr_1}J_{2n}(vr_1)-J_{2n+1}(vr_1)\right)\right\}\end{array}\right\}\delta_{n,p}$$

$$\approx p'_{2n}c^2v\left\{\begin{array}{l}\beta\left\{J_{2n+1}(vr_1)Y_{2n}(vr_2)-Y_{2n+1}(vr_1)J_{2n}(vr_2)\right\}+\\ +\alpha v\left\{\begin{array}{l}\dfrac{2n}{vr_1}\left(Y_{2n+1}(vr_2)J_{2n}(vr_1)-J_{2n+1}(vr_2)Y_{2n}(vr_1)\right)+\\ +\dfrac{2n}{vr_2}\left(J_{2n+1}(vr_1)Y_{2n}(vr_2)-Y_{2n+1}(vr_1)J_{2n}(vr_2)\right)+\\ +Y_{2n+1}(vr_1)J_{2n+1}(vr_2)-Y_{2n+1}(vr_2)J_{2n+1}(vr_1)\end{array}\right\}\end{array}\right\}\delta_{n,p}$$

Dans ces conditions l'équation déterminantale se réduit à l'équation transcendantale suivante :

$$\beta\left\{Y_{2n}'(vr_1)J_{2n}(vr_2)-J_{2n}'(vr_1)Y_{2n}(vr_2)\right\}+\alpha v\left\{Y_{2n}'(vr_1)J_{2n}'(vr_2)-J_{2n}'(vr_1)Y_{2n}'(vr_2)\right\}=0$$

$$\Leftrightarrow h\left\{Y_{2n}'(vr_1)J_{2n}(vr_2)-J_{2n}'(vr_1)Y_{2n}(vr_2)\right\}+v\left\{Y_{2n}'(vr_1)J_{2n}'(vr_2)-J_{2n}'(vr_1)Y_{2n}'(vr_2)\right\}=0 \quad n=0,1,2,\cdots \quad avec \quad h=\frac{\beta}{\alpha}$$

Dégénérescence vers deux bandes centrées de part et d'autre de l'axe des abscisses

On cherche donc à calculer la répartition de température sur l'espace sur la bande supérieure (ou inférieur) situé entre la hauteur b_1 et b_2, donc de largeur b_2-b_1. Il s'agit du cas $a_1/b_1 \to \infty$ et $a_2/b_2 \to \infty$. Les paramètres du problème aux limites prennent la forme suivante

$$c=\sqrt{a_2{}^2-b_2{}^2}\quad \eta_2=ArcCosh\left(\frac{a_2}{c}\right)\approx ArcCosh(1)\Rightarrow \eta_2\approx 0\quad b_{1,2}=cSinh(\eta_{1,2})\approx c\eta_{1,2}\approx a_2\eta_{1,2}\Rightarrow \eta_{1,2}\approx\frac{b_{1,2}}{a_2}\to 0$$

Dans un problème cartésien, la condition aux limites radiales se transforme en une condition aux limites angulaires pour les valeurs $\vartheta=\pi/2$ et $\vartheta=-\pi/2$ et , soit en $y=+b_{1,2}$ et $y=-b_{1,2}$. Soit :

$$\frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2}=-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(y,t)}{\partial t}\Rightarrow T(y,t)=\sum_{m=1}^{m=+\infty}A_m Cos(\nu_m(y-b_1))e^{-\delta\nu_m{}^2 t}\quad h=\frac{\beta}{\alpha}\quad \left.\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\right|_{y=b_1}=0\qquad \beta T(y,t)+\alpha\left.\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\right|_{y=b_2}=0$$

$$\Leftrightarrow hT(y,t)+\left.\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\right|_{y=b_2}=0\Rightarrow \beta Cos(\nu(b_2-b_1))=\alpha\nu Sin(\nu(b_2-b_1))\Rightarrow \beta=\alpha\nu Tan(\nu(b_2-b_1))\Rightarrow\begin{cases}\beta b_2=\alpha\nu b_2 Tan(\nu(b_2-b_1))\\ hb_2=\nu b_2 Tan(\nu(b_2-b_1))\end{cases}$$

Voyons si l'on peut entrevoir une simplification de l'équation déterminantale :

$$E_{2n,2p}=\beta c\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\}\delta_{n,p}+\frac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}$$

$$\approx\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}'\left(\frac{b_1}{a_2},q\right)Je_{2p}\left(\frac{b_2}{a_2},q\right)-Je_{2p}'\left(\frac{b_1}{a_2},q\right)Ne_{2p}\left(\frac{b_2}{a_2},q\right)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\frac{\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}'\left(\frac{b_1}{a_2},q\right)Je_{2p}'\left(\frac{b_2}{a_2},q\right)-Je_{2p}'\left(\frac{b_1}{a_2},q\right)Ne_{2p}'\left(\frac{b_2}{a_2},q\right)\right\}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{|Sin(\theta)|}\end{array}\right\}$$

Le spectre des valeurs du paramètre q solution de l'équation déterminantale se déplace vers des valeurs très importantes en suivant celle du facteur d'échelle c (les grands axes des ellipses extérieure et intérieure devenant infinis). En utilisant l'approximation asymptotique de Sips (valable entre 0 et π), les valeurs significatives des fonctions angulaires sont concentrées autour de la valeur π/2 et le dénominateur Sin(ϑ) pratiquement constant=1 peut être sortie de l'intégrale. Comme auparavant on peut utiliser pour les fonctions radiales l'expansion au premier terme de Goldstein (voir A.Erdelyi, H.Bateman-HIGHER_TRANSCENDENTAL_FUNCTIONS_VOL_III, formule 7 section 16.7 page 127 pour la fonction Je, et MachLaclan Theory and Application of Mathieu Functions, additionnal results 6 page 385, formules (1,2)). Il vient selon ces deux aspects :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{Sin(\theta)}\approx\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)\approx\frac{\pi}{2}\delta_{n,p}\quad q>>0\quad\begin{cases}Je_n(x,q)\approx\frac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\\ Ne_n(x,q)\approx ce_n(0,q)\sqrt{Cosh(x)}Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\\ Je_n'(x,q)\approx-\frac{ce_n(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}2\sqrt{q}Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\\ Ne_n'(x,q)\approx ce_n(0,q)2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\end{cases}$$

$$Posons\quad q=\frac{\nu^2c^2}{4}\Rightarrow 2\sqrt{q}=\nu c\quad et\quad 2\sqrt{q}\frac{b_1}{a_2}\approx\nu b_1\quad et\quad 2\sqrt{q}\frac{b_2}{a_2}\approx\nu b_2\quad et\quad A_{2p}=A_{2p}(q)\neq 0\quad\forall q\quad A_{2p}=\frac{ce_{2p}(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}\quad\begin{cases}Cosh(\eta_1)\approx 1\\ Cosh(\eta_2)\approx 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p}\approx 2\sqrt{q}A_{2p}{}^2c\delta_{n,p}\left\{\begin{array}{l}\beta\{Cos(\nu b_1)Cos(\nu b_2)+Sin(\nu b_1)Sin(\nu b_2)\}+\\ +\alpha\nu\{-Cos(\nu b_1)Sin(\nu b_2)+Sin(\nu b_1)Cos(\nu b_2)\}\end{array}\right\}\approx 2\nu A_{2p}{}^2c^2\delta_{n,p}\{\beta\,Cos(\nu(b_2-b_1))-\alpha\nu Sin(\nu(b_2-b_1))\}$$

Cette équation déterminantale approchée donne des coefficients du déterminant uniquement diagonaux, et dont les valeurs ne dépendent plus de l'indice n. Il reste donc un spectre de valeurs propres uniquement déterminé par la résolution d'une simple équation transcendantale dont le spectre discret est indicé par les valeurs m : $\beta\,Cos(\nu(b_2-b_1))=\alpha\nu Sin(\nu(b_2-b_1))$. Il est heureux par ce biais d'effectivement retrouver l'équation transcendantale de la résolution du problème cartésien.

Résolution numérique des racines de l'équation déterminantale

Le schéma de résolution numérique des racines de l'équation déterminantale est identique à celui du cylindre elliptique plein. Pour la recherche des racines, on augmente la taille du déterminant (une taille de 6x6 suffit amplement en partant de 1x1) et l'on constate une rapide convergence. Cela permet également de repérer les indices 2n et m des diverses racines trouvées qui apparaissent progressivement lors de l'augmentation du déterminant. Pour repérer les valeurs 2n et m, il suffit de partir du déterminant simplifié à la diagonale principale de la matrice qui devient alors une simple équation transcendantale pour chaque valeur de n et qui par résolution numérique donne les valeurs approximatives autour desquelles la convergence s'effectue et par retour permet d'identifier la valeur de n et m dans la résolution approchée de l'équation déterminantale

Voici les 13 premières valeurs approchées des racines v de l'équation déterminantale, pour un cylindre elliptique creux de dimensions : a2=2, b2=1, b1=2b2/10=0.2, c=√3, η2=ArcCosh(a2/c)=0.549306, η1=ArcSinh(b1/c)=0.115215, a1=c Cosh(η1)=1.74356 :

h=β/α	0,1	2,1	4,1	0,2	6,1	2,2	8,1	4,2	10,1	6,2	0,3	8,2	2,3
Neumann=0	0	1.6549802630341095	3.120920890838524	4.166373090488708	4.575247804914871	5.264629355663223	6.016743773866751	6.451987980668031	7.439184403570425	7.707725756450125	8.101712811300951	9.010983434933525	9.163821567979726
1	1.1859486886687225	2.2133212185440954	3.477701091326585	4.45238822317579	4.847791460532931	5.5132788668805	6.2536858823783446	6.664102819052443	7.657097761817138	7.886187240313379	8.254854546518564	9.159308682178521	9.306033396550655
2	1.505816992326183	2.5333708032978772	3.7297156858905636	4.689028355632056	5.0485017814926465	5.7279975036965 41	6.4301862838353 42	6.8545640907026 87	7.8243296533421 61	8.0523721401879 91	8.3990072275756 75	9.3012272610455 97	9.4410107510208 28
10	2.0515530208122654	3.205579975645715	4.439030457016362	5.537136333417476	5.707622720154768	6.568073396958948	7.030887151916489	7.667375553249151	8.407684389 66712	8.823439486591779	9.156832876 90167	10.02515146 6885022	10.17735669 0381044
50	2.2341027928551296	3.439547080 02405	4.7366884754987355	6.017016789131792	6.057627533244006	7.084651809380182	7.396201640759332	8.215178152870381	8.771843601566701	9.396998205938132	9.842678788682965	10.62065407 1787992	10.88608517 6473202
100	2.2594052043002875	3.471492295 99467	4.777352681835138	6.089437878023615	6.108027821314491	7.163839713322222	7.452797061021259	8.300855596694475	8.830054553557229	9.488961660303406	9.960604037110985	10.71879147 9602414	11.01060590 2972094
Dirichlet=∞	2.2852698852550133	3.503968087327933	4.818448009119461	6.1639713299358405	6.159157298070025	7.245367372006767	7.511032469357825	8.389129706 48154	8.890546159861756	9.583822329179982	10.08338699427056	10.82016609 845143	11.14047180 2429252

Voici les 14 premières valeurs approchées des racines v de l'équation déterminantale, pour un cylindre elliptique creux de dimensions : a2=4, b2=1, b1=2b2/10=0.2, c=√15, η2=ArcCosh(a2/c)=0.255413, η1=ArcSinh(b1/c)=0.0516169, a1=c Cosh(η1)=3.87814 :

h=β/α	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3	2,3
Neumann=0	0	0.8600685239343296	1.6334815728700829	2.4018460421812278	3.161811981482076	3.9332232673113277	4.048463610990122	4.5725334056421865	5.123766119039874	5.699016877085613	6.295359116293850 5	6.910149688676589	7.977634642318701	8.491574080455576
1	1.0914893859643342	1.5673933612320774	2.1430104745565024	2.7894627738387983	3.478299047663964	4.171410595757374	4.336554505 66951	4.844328487912837	5.379540993158248	5.939329203139120 5	6.524809078254249	7.121069785884158	8.135323752 82042	8.642586410697888
2	1.3743337371091442	1.8624691662 5136	2.4244900840257166	3.0413450738034427	3.6980181373359402	4.3640210419231817	4.5721817912 6144	5.0706296644 64404	5.5958632624 64865	6.1453996266 53144	6.7167692802 80126	7.3069472326576195	8.2785478081 83934	8.7829575654 66296
10	1.8794149306 73966	2.4085073861535524	2.9914433860815506	3.6148850177 98720	4.2675373678 72257	4.9439932136 25238	5.4055330070 23424	5.9019113719 19617	6.4197236610 57808	6.9574623659 54145	7.5136046038 43455	8.0900271365 4803	9.0299620033 44973	9.5258468530 59951
50	2.05355480555626	2.6010294952066895	3.1979271530143185	3.8325408548298805	4.4953617426 75789	5.1793227114 57004	5.8756468038877365	6.3881852149470575	6.9201957570 60147	7.4702132369 66205	8.0368036296 4302	8.6190171506 74784	9.7073001847 5839	10.2134629 56101344
100	2.0779377404 64782	2.6280340395 19018	3.2270093521205054	3.8633120438 94354	4.5276194818 39332	5.2128481929 53277	5.9468918804 3532	6.4623948069 67231	6.9971896795 22644	7.5498159829 17918	8.1188479548 67913	8.7030360383 9995	9.8239645671 05461`	10.3330243 61421517
Dirichlet=∞	2.1029292423632073	2.6557065581 61065	3.2568183876 87341	3.8948586195 99079	4.5606779957 73735	5.2472856459 38626	6.0203483939 09924	6.5389323205 61933	7.0766350432 01417	7.6320014632 93423	8.2036149021 50273	8.7901203794 18912	9.9456256326 96759	10.4578056 46890286

Valeurs approchées asymptotiques des racines de l'équation déterminantale

Comme le calcul des valeurs approchées a déjà été réalisé dans le cas le plus général du cylindre creux avec deux échanges intérieur et extérieur, il vient :

$$\nu(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)Cos\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)=(\alpha_1\alpha_2\nu^2-\beta_1\beta_2)Sin\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)$$

$$\alpha_1\to 1 \qquad \beta_1\to 0 \qquad \alpha_2\to\alpha \qquad \beta_2\to\beta\Rightarrow\beta=\nu\alpha Tan\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)$$

.

Je donne également l'expression approchée des termes de la matrice diagonale :

$$q>>0\begin{cases}Je_{2n}(x,q)\approx\frac{ce_{2n}(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Cos(\gamma(\nu,x)) \quad Ne_{2n}(x,q)\approx\frac{ce_{2n}(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Sin(\gamma(\nu,x)) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}\approx\frac{\delta_{n,p}}{\sqrt{2}Cosh(\eta_2)}\\ Je_{2n}'(x,q)\approx-ce_{2n}(0,q)\nu c\sqrt{Cosh(x)}Sin(\gamma(\nu,x)) \quad Ne_{2n}'(x,q)\approx ce_{2n}(0,q)\nu c\sqrt{Cosh(x)}Cos(\gamma(\nu,x))\end{cases}$$

$$E_{2n,2p}\approx\delta_{n,p}\left\{\beta c\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}+\frac{\alpha}{Cosh(\eta_2)}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\right\}$$

$$Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\approx\nu c(ce_{2n}(0,q))^2\sqrt{\frac{Cosh(\eta_1)}{Cosh(\eta_2)}}Cos(\gamma(\nu,\eta_2)-\gamma(\nu,\eta_1))$$

$$Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\approx-\nu^2c^2(ce_{2n}(0,q))^2\sqrt{Cosh(\eta_1)Cosh(\eta_2)}Sin(\gamma(\nu,\eta_2)-\gamma(\nu,\eta_1))$$

$$E_{2n,2p}\approx\delta_{n,p}\nu^2c^2(ce_{2n}(0,q))^2\sqrt{\frac{Cosh(\eta_1)}{Cosh(\eta_2)}}\left\{\frac{\beta}{\nu}Cos(\gamma(\nu,\eta_2)-\gamma(\nu,\eta_1))-\alpha Sin(\gamma(\nu,\eta_2)-\gamma(\nu,\eta_1))\right\}$$

<u>Expression de la solution du problème aux limites sur le cylindre elliptique creux : Robin homogène extérieur, Neumann homogène intérieur</u>

Sachant que sur ce type problème aux limites (réchauffement, refroidissement), il convient d'utiliser la propriété d'orthogonalité bidimensionnelles du produit des fonctions propres radiales et angulaires de Mathieu (voir également le problème aux limites de l'équation de Laplace sur un cylindre à section elliptique), alors la forme de la solution est la suivante :

$$(1)\quad \textit{Réchauffement}\quad C.L.\quad \left.\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_1}=0\quad \left.\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\right|_{\eta=\eta_2}=\beta\, T_0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=0\quad Posons\quad (\nu_{2n,m})^2=\frac{4q_{2n,m}}{c^2}$$

$$B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left\{Ne_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left\{Ne_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}^2\left(ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})\right)^2}$$

$$(1)\Rightarrow \frac{T_0-T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

$$(2)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad \left.\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_1}=0\quad \left.\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\right|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0$$

$$(2)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

$$(3)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad \left.\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}\right|_{\eta=\eta_1}=0\quad \left.\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\right|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0(\eta,\theta)\quad tq\quad \begin{cases}T_0(\eta,-\theta)=T_0(\eta,\theta)\\ T_0(\eta,\pi-\theta)=T_0(\eta,\theta)\end{cases}$$

$$B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)T_0(\eta,\theta)\left\{Ne_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left\{Ne_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}'(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}^2\left(ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})\right)^2}$$

$$(3)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

Etude d'un problème transitoire de diffusion en coordonnées elliptiques avec conditions aux limites de Robin et de Dirichlet: cylindre creux de longueur infinie de section elliptique soumis à des conditions initiales de température fixe T_0, et une condition aux limites de Robin homogènes de température sur la surface extérieure et condition homogène de Dirichlet sur la surface intérieure, problème de refroidissement

Le régime transitoire est solution du problème suivant :

$$\Delta T_t(\eta,\theta,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial t}=0 \quad C.L. \quad T_t(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_1}=0 \quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}+\beta\, T_t(\eta,\theta,t)\Bigg|_{\eta=\eta_2}=0 \quad C.I \quad T_t(\eta,\theta,0)=T_0$$

D'après les propriétés des fonctions de Mathieu périodiques. La solution complète est à rechercher sous la forme d'une série, la multiplicité des valeurs propres du problème aux limites est fonction des conditions aux limites homogènes. La décomposition est logiquement à double indice, un indice n lié à la décomposition en fonctions angulaire périodique de Mathieu , et un indice lié aux valeurs propres $q_{n,m}$ obtenu d'après le respect des conditions aux limites homogènes sur la surface pour chaque indice n :

$$U_{2n,m}(\eta,\theta)=\left\{Ne_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})$$

$$\Rightarrow T(\eta,\theta,t)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})e^{-\delta\frac{4q_{2n,m}}{c^2}t}$$

Les calculs sont tout à fait similaire à l'exemple précédent. Il vient un système d'équations linéaires nécessitant que le déterminant infini soit nul, pour avoir en théorie une solution non triviale :

$$\text{Indice de Kronecker} \quad \delta_{i,j} \quad G_l\left(\eta,\frac{1}{2}\right)==\frac{2\sqrt{2}}{\pi(1+\partial_{l,0})}Q_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \quad \Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)(1+\delta_{l+j,0})+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)(1+\delta_{|l-j|,0})\right\}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{p=0}^{p=\infty}B_{2p}\left\{\begin{array}{l}\beta\, c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\frac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_2))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\end{array}\right\}=0 \qquad et \qquad h=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$\left\{\begin{array}{l}E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\frac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}\end{array}\right\}\\ E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta\, c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\frac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_2))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\end{array}\right\}\end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta=\begin{vmatrix}E_{0,0} & E_{0,2} & E_{0,4} & \dots & \dots\\ E_{2,0} & E_{2,2} & E_{2,4} & \dots & \dots\\ E_{4,0} & E_{4,2} & E_{4,4} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}=0$$

Cas limites permettant la simplification de l'équation déterminantale

Condition homogène de Dirichlet

Pour une condition homogène de type Dirichlet le paramètre α est nulle, seule les termes diagonaux subsiste, et la condition de nullité du déterminant se réduit à celle des termes diagonaux, soit : $Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)=Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)$*. Le spectre des valeurs du paramètre q est donc celui respectant cette équation transcendantale.*

Condition homogène de Neumann

Lorsqu'il s'agit d'une conditions aux limites de Neumann, alors c'est le paramètre β qui est nulle, conduisant à l'équation déterminantale:

$$E_{2n,2p}=\frac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_2))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)$$

$$=\frac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}C_{2n,2p}$$

$$C_{2n,2p}=\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_0))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)\Rightarrow\Delta=0\Leftrightarrow\Delta=\left\{\prod_{l=0}^{+\infty}\left\{Ne_{2l}(\eta_1,q)Je_{2l}'(\eta_2,q)-Je_{2l}(\eta_1,q)Ne_{2l}'(\eta_2,q)\right\}\right\}\begin{vmatrix}C_{0,0} & C_{0,2} & C_{0,4} & \dots & \dots\\ C_{2,0} & C_{2,2} & C_{2,4} & \dots & \dots\\ C_{4,0} & C_{4,2} & C_{4,4} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow Ne_{2l}(\eta_1,q)Je_{2l}'(\eta_2,q)=Je_{2l}(\eta_1,q)Ne_{2l}'(\eta_2,q)$$

Ce qui est la condition de nullité de la dérivée première des fonctions radiales de Mathieu sur les deux bords de l'ellipse. Le spectre des valeurs du paramètre q est donc celui respectant cette équation transcendantale.

Dégénérescence vers une configuration circulaire

Lorsque l'ellipse dégénère en cercle, les formules de passage ont lieu :

$$Ellipse\ grand\ axe\ a_2\ ,\ petit\ axe\ b_2\Rightarrow c=\sqrt{a_2{}^2-b_2{}^2}\quad a_2=cCosh(\eta_2)\quad b_2=cSinh(\eta_2)\Rightarrow\eta_2=ArcCosh\left(\frac{a_2}{c}\right)$$

$$Ellipse\ grand\ axe\ a_1\ ,\ petit\ axe\ b_1\Rightarrow a_1=cCosh(\eta_1)\quad b_1=cSinh(\eta_1)\Rightarrow\eta_1=ArcCosh\left(\frac{a_1}{c}\right)\qquad c=b_2\sqrt{\frac{a_2{}^2}{b_2{}^2}-1}$$

$$a_{1,2}\to b_{1,2}\Rightarrow c\to 0\quad et\quad \eta_{1,2}\to\infty\quad et\quad\begin{cases}cCosh(\eta)\to r\\ cSinh(\eta)\to r\end{cases}\Rightarrow c\frac{e^{\eta_{1,2}}}{2}\to r_{1,2}=a_{1,2}=b_{1,2}$$

$$\frac{ce^{\eta}}{2}\to r\Rightarrow\frac{c^2e^{2\eta}}{4}\to r^2\quad\frac{dr}{d\eta}=r\qquad qe^{2\eta}\to\nu^2r^2\Rightarrow q\to\frac{c^2\nu^2}{4}\Rightarrow\frac{2\sqrt{q}}{c}\to\nu$$

$$ce_0(\vartheta,q)\to\frac{1}{\sqrt{2}}\quad ce_{2n}(\vartheta,q)\to Cos(2n\vartheta)\quad Je_{2n}(\eta,q)\to p'_{2n}\,J_{2n}(\nu r)\quad Ne_{2n}(\eta,q)\to p'_{2n}\,Y_{2n}(\nu r)\quad p'_{2n}\quad se\ neutralise\ dans\ le\ développement$$

Si bien que l'équation déterminantale se simplifie grandement :

$$E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}Je_{2p}(\eta_{1,2},q)\approx p'_{2n}\,J_{2n}(\nu r_{1,2})\quad \dfrac{dJe_{2p}(\eta_{1,2},q)}{d\eta}=\dfrac{dJe_{2p}(\eta_{1,2},q)}{dr}\dfrac{dr}{d\eta}\approx p'_{2n}\,r_{1,2}\dfrac{dJ_{2n}(\nu r)}{dr}\Big|_{r=r_{1,2}}\\ Ne_{2p}(\eta_{1,2},q)\approx p'_{2n}\,Y_{2n}(\nu r_{1,2})\quad \dfrac{dNe_{2p}(\eta_{1,2},q)}{d\eta}=\dfrac{dNe_{2p}(\eta_{1,2},q)}{dr}\dfrac{dr}{d\eta}\approx p'_{2n}\,r_{1,2}\dfrac{dY_{2n}(\nu r)}{dr}\Big|_{r=r_{1,2}}\end{array}\right.\quad \frac{r_{1,2}}{e^{\eta_{1,2}}}\approx\frac{c}{2}\quad \frac{1}{\sqrt{Cosh(2\eta_{1,2})}}\approx\frac{\sqrt{2}}{e^{\eta_{1,2}}}$$

$$\eta_{1,2}\to\infty\Rightarrow E_{2n,2p}\approx p'_{2n}c\left\{\beta\left\{Y_{2n}(\nu r_1)J_{2n}(\nu r_2)-J_{2n}(\nu r_1)Y_{2n}(\nu r_2)\right\}+\alpha\left\{Y_{2n}(\nu r_1)\frac{dJ_{2n}(\nu r)}{dr}\Big|_{r=r_2}-J_{2n}(\nu r_1)\frac{dY_{2n}(\nu r)}{dr}\Big|_{r=r_2}\right\}\right\}\delta_{n,p}$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p}\approx p'_{2n}\,c\{\beta\{Y_{2n}(\nu r_1)J_{2n}(\nu r_2)-J_{2n}(\nu r_1)Y_{2n}(\nu r_2)\}+\alpha\nu\{Y_{2n}(\nu r_1)J_{2n}'(\nu r_2)-J_{2n}(\nu r_1)Y_{2n}'(\nu r_2)\}\}\delta_{n,p}$$

$$Or\quad\left\{\begin{array}{l}J_{2n}'(x)=\dfrac{2n}{x}J_{2n}(x)-J_{2n+1}(x)\Rightarrow J_{2n}'(\nu b)=\dfrac{2n}{\nu b}J_{2n}(\nu b)-J_{2n+1}(\nu b)\\ Y_{2n}'(x)=\dfrac{2n}{x}Y_{2n}(x)-Y_{2n+1}(x)\Rightarrow Y_{2n}'(\nu b)=\dfrac{2n}{\nu b}Y_{2n}(\nu b)-Y_{2n+1}(\nu b)\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p}\approx p'_{2n}\,c^2\nu\left\{\begin{array}{l}\beta\{Y_{2n}(\nu r_1)J_{2n}(\nu r_2)-J_{2n}(\nu r_1)Y_{2n}(\nu r_2)\}+\\ +\alpha\nu\left\{Y_{2n}(\nu r_1)\left(\dfrac{2n}{\nu r_2}J_{2n}(\nu r_2)-J_{2n+1}(\nu r_2)\right)-J_{2n}(\nu r_1)\left(\dfrac{2n}{\nu r_2}Y_{2n}(\nu r_2)-Y_{2n+1}(\nu r_2)\right)\right\}\end{array}\right\}\delta_{n,p}$$

$$\approx p'_{2n}\,c^2\nu\left\{\begin{array}{l}\left\{\beta+\alpha\dfrac{2n}{r_2}\right\}\{Y_{2n}(\nu r_1)J_{2n}(\nu r_2)-J_{2n}(\nu r_1)Y_{2n}(\nu r_2)\}+\\ +\alpha\nu\{Y_{2n+1}(\nu r_2)J_{2n+1}(\nu r_1)-Y_{2n+1}(\nu r_1)J_{2n+1}(\nu r_2)\}\end{array}\right\}\delta_{n,p}$$

Dans ces conditions l'équation déterminantale se réduit à l'équation transcendantale suivante :

$$\beta\{Y_{2n}(\nu r_1)J_{2n}(\nu r_2)-J_{2n}(\nu r_1)Y_{2n}(\nu r_2)\}+\alpha\nu\{Y_{2n}(\nu r_1)J_{2n}'(\nu r_2)-J_{2n}(\nu r_1)Y_{2n}'(\nu r_2)\}=0$$

$$\Leftrightarrow h\{Y_{2n}(\nu r_1)J_{2n}(\nu r_2)-J_{2n}(\nu r_1)Y_{2n}(\nu r_2)\}+\nu\{Y_{2n}(\nu r_1)J_{2n}'(\nu r_2)-J_{2n}(\nu r_1)Y_{2n}'(\nu r_2)\}=0\quad n=0,1,2,\cdots\quad avec\quad h=\frac{\beta}{\alpha}$$

<u>*Dégénérescence vers deux bandes centrées de part et d'autre de l'axe des abscisses*</u>

On cherche donc à calculer la répartition de température sur l'espace sur la bande supérieure (ou inférieur) situé entre la hauteur b_1 et b_2, donc de largeur b_2-b_1. Il s'agit du cas a_1/b_1->∞ et a_2/b_2->∞. Les paramètres du problème aux limites prennent la forme suivante

$$c=\sqrt{a_2{}^2-b_2{}^2}\quad \eta_2=ArcCosh\left(\frac{a_2}{c}\right)\approx ArcCosh(1)\Rightarrow\eta_2\approx 0\quad b_{1,2}=cSinh(\eta_{1,2})\approx c\eta_{1,2}\approx a_2\eta_{1,2}\Rightarrow\eta_{1,2}\approx\frac{b_{1,2}}{a_2}\to 0$$

Dans un problème cartésien, la condition aux limites radiales se transforme en une condition aux limites angulaires pour les valeurs ϑ=π/2 et ϑ=-π/2 et , soit en y=+$b_{1,2}$ et y=-$b_{1,2}$. Soit :

$$\frac{\partial^2T(y,t)}{\partial y^2}=-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(y,t)}{\partial t}\Rightarrow T(y,t)=\sum_{m=1}^{m=+\infty}A_m Sin(\nu_m(y-b_1))\,e^{-\delta\nu_m{}^2t}\quad h=\frac{\beta}{\alpha}$$

$$T(y,t)\big|_{y=b_1}=0\quad \beta T(y,t)+\alpha\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\Big|_{y=b_2}\Leftrightarrow hT(y,t)+\frac{\partial T(y,t)}{\partial y}\Big|_{y=b_2}$$

$$\Rightarrow\beta Sin(\nu(b_2-b_1))+\alpha\nu Cos(\nu(b_2-b_1))=0\Rightarrow\beta Tan(\nu(b_2-b_1))=-\alpha\nu\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\beta b_2Tan(\nu(b_2-b_1))=-\alpha\nu b_2\\ hb_2Tan(\nu(b_2-b_1))=-\nu b_2\end{array}\right.$$

Voyons si l'on peut entrevoir une simplification de l'équation déterminantale :

$$E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}\end{array}\right\}$$

$$E_{2n,2p}\approx\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}\left(\dfrac{b_1}{a_2},q\right)Je_{2p}\left(\dfrac{b_2}{a_2},q\right)-Je_{2p}\left(\dfrac{b_1}{a_2},q\right)Ne_{2p}\left(\dfrac{b_2}{a_2},q\right)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\dfrac{\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}\left(\dfrac{b_1}{a_2},q\right)Je_{2p}'\left(\dfrac{b_2}{a_2},q\right)-Je_{2p}\left(\dfrac{b_1}{a_2},q\right)Ne_{2p}'\left(\dfrac{b_2}{a_2},q\right)\right\}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{|Sin(\theta)|}\end{array}\right\}$$

Le spectre des valeurs du paramètre q solution de l'équation déterminantale se déplace vers des valeurs très importantes en suivant celle du facteur d'échelle c (les grands axes des ellipses extérieure et intérieure devenant infinis). En utilisant l'approximation asymptotique de Sips (valable entre 0 et π), les valeurs significatives des fonctions angulaires sont concentrées autour de la valeur π/2 et le dénominateur Sin(ϑ) pratiquement constant=1 peut être sortie de l'intégrale. Comme auparavant on peut utiliser pour les fonctions radiales l'expansion au premier terme de Goldstein (voir A.Erdelyi H.Bateman-HIGHER_TRANSCENDENTAL_FUNCTIONS_VOL_III, formule 7 section 16.7 page 127 pour la fonction Je, et MachLaclan Theory and Application of Mathieu Functions, additionnal results 6 page 385, formules (1,2)). Il vient selon ces deux aspects :

$$\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{Sin(\theta)}\approx\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)\approx\frac{\pi}{2}\delta_{n,p}$$

$$E_{2n,2p}\approx\delta_{n,p}\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}\left(\dfrac{b_1}{a_2},q\right)Je_{2p}\left(\dfrac{b_2}{a_2},q\right)-Je_{2p}\left(\dfrac{b_1}{a_2},q\right)Ne_{2p}\left(\dfrac{b_2}{a_2},q\right)\right\}\delta_{n,p}+\\ +\alpha\left\{Ne_{2p}\left(\dfrac{b_1}{a_2},q\right)Je_{2p}'\left(\dfrac{b_2}{a_2},q\right)-Je_{2p}\left(\dfrac{b_1}{a_2},q\right)Ne_{2p}'\left(\dfrac{b_2}{a_2},q\right)\right\}\end{array}\right\}$$

$$q>>0\quad\left\{\begin{array}{ll}Je_n(x,q)\approx\dfrac{A_nCos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)}{\sqrt{Cosh(x)}} & Ne_n(x,q)\approx\dfrac{A_nSin\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)}{\sqrt{Cosh(x)}}\\ Je_n'(x,q)\approx-A_n2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}Sin\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right) & Ne_n'(x,q)\approx A_n2\sqrt{q}\sqrt{Cosh(x)}Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x)\right)\end{array}\right.\qquad x\approx0\quad Cosh(x)\approx1$$

$$Posons\quad q=\frac{\nu^2c^2}{4}\Rightarrow2\sqrt{q}=\nu c\quad et\quad 2\sqrt{q}\frac{b_1}{a_2}\approx\nu b_1\quad et\quad 2\sqrt{q}\frac{b_2}{a_2}\approx\nu b_2\quad et\quad A_{2p}=A_{2p}(q)\neq0\quad\forall q$$

$$\Rightarrow E_{2n,2p}\approx A_{2p}{}^2c\delta_{n,p}\left\{\begin{array}{l}\beta\left\{Sin(\nu b_1)Cos(\nu b_2)-Cos(\nu b_1)Sin(\nu b_2)\right\}+\\ +\alpha\nu\left\{-Sin(\nu b_1)Sin(\nu b_2)-Cos(\nu b_1)Cos(\nu b_2)\right\}\end{array}\right\}\approx-A_{2p}{}^2c\delta_{n,p}\left\{\beta Sin(\nu(b_2-b_1))+\alpha\nu Cos(\nu(b_2-b_1))\right\}$$

Cette équation déterminantale approchée donne des coefficients du déterminant uniquement diagonaux, et dont les valeurs ne dépendent plus de l'indice n à part la constante de proportionnalité qui ne s'annule jamais. Il reste donc un spectre de valeurs propres uniquement déterminé par la résolution d'une simple équation transcendantale dont le spectre discret est indicé par les valeurs m : $\beta Sin(\nu(b_2-b_1))+\alpha\nu Cos(\nu(b_2-b_1))=0$ *, la même que pour le problème cartésien.*

Résolution numérique des racines de l'équation déterminantale

Le schéma de résolution numérique des racines de l'équation déterminantale est identique à celui du cylindre elliptique plein. Pour la recherche des racines, on augmente la taille du déterminant (une taille de 6x6 suffit amplement en partant de 1x1) et l'on constate une rapide convergence. Cela permet également de repérer les indices 2n et m des diverses racines trouvées qui apparaissent progressivement lors de l'augmentation du déterminant. Pour repérer les valeurs 2n et m, il suffit de partir du déterminant simplifié à la diagonale principale de la matrice qui devient alors une simple équation transcendantale pour chaque valeur de n et qui par résolution numérique donne les valeurs approximatives autour desquelles la convergence s'effectue et par retour permet d'identifier la valeur de n et m dans la résolution approchée de l'équation déterminantale

Voici les 13 premières valeurs approchées des racines v de l'équation déterminantale, pour un cylindre elliptique creux de dimensions : a2=2, b2=1, b1=2b2/10=0.2, c=√3, η2=ArcCosh(a2/c)=0.549306, η1=ArcSinh(b1/c)=0.115215, a1=c Cosh(η1)=1.74356 :

h=β/α	0,1	2,1	4,1	6,1	0,2	8,1	2,2	10,1	4,2	6,2	0,3	8,2	2,3
Neumann=0	2.1431175617974216	3.1794449132946703	4.203127050658378	5.230477330158783	6.127615202093693	6.385411810783283	7.19800843992286	7.645371627187686	8.32959602935221	9.51028268866496	10.06231554668911	10.728973493197259	11.115615780935999
1	2.6439687752922767	3.636009363693116	4.650477738430433	5.637115131156324	6.328235084117941	6.718168123562586	7.380466644031689	7.921838520781024	8.494773271884279	9.659512200589974	10.18624794628969	10.863754662760806	11.232401304845245
2	2.959170687182264	3.945363236499361	4.970535023287796	5.956224878224499	6.509712711716794	6.990013108255012	7.548299882789295	8.150681799009513	8.648907732420943	9.800491746605402	10.30528614669074	10.992487956050452	11.345087414575953
10	3.756624283075153	4.797611836991242	5.904809266594317	7.02057857571491	7.3280810207441265	8.08271167156839	8.348381483393938	9.126270392108998	9.422492401139037	10.542469190397453	10.998654389181487	11.700740496432198	12.018194009196424
50	4.098716165727245	5.18677637435255	6.34801523235095	7.547271614391954	7.922872062552498	8.744403464815072	8.973150444834236	9.89320707736307	10.072655432124051	11.214009482949961	11.754717329815694	12.390690541283831	12.791471921080584
100	4.147822319164185	5.242949445148127	6.411965741165399	7.62178999703108	8.0182894724956	8.835849867760846	9.075328851319707	10.010844556757668	10.181388526308242	11.329172342197355	11.894602491187356	12.512118078637158	12.937803940539386
Dirichlet=∞	4.198163860030879	5.3004649763872775	6.477254229676147	7.697271626899461	8.116994733897036	8.927401946618236	9.181139517158208	10.128148606415737	10.294142981153302	11.448797928204739	12.041383202677292	12.638577785899365	13.09168159793596

Voici les 13 premières valeurs approchées des racines v de l'équation déterminantale, pour un cylindre elliptique creux de dimensions : a2=4, b2=1, b1=2b2/10=0.2, c=√15, η2=ArcCosh(a2/c)=0.255413, η1=ArcSinh(b1/c)=0.0516169, a1=c Cosh(η1)=3.87814 :

h=β/α	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3
Neumann=0	2.0749358227177477	2.61203819952032	3.1936368358786984	3.8085696782214233	4.447793306818448	5.104167360581388	6.0119505801197874	6.5291161513565665	7.065285338083375	7.619011838546697	8.188888983005159	8.773572525401054	9.940676166731492
1	2.557157671084197	3.0545744970966333	3.5973199420570463	4.176966089228437	4.78545618405285	5.408510372903402	6.213698045797909	6.722655597908229	7.250754340291146	7.796610539281871	8.358862281903177	8.93495728290373	10.065286235848097
2	2.8602803702577972	3.347368498724397	3.8759966973182234	4.440054673100087	5.033350865488068	5.64699659960503	6.395132544261815	6.897985206810644	7.419876935717397	7.959514195454687	8.515608337980328	9.085501563042067	10.18469926543731
10	3.62768733643361	4.129056283571427	4.660748048517281	5.219340285200603	5.801485988040184	6.408581212163509	7.204544090593428	7.699711028070052	8.211377580118995	8.738683407064402	9.280749469959638	9.83898789124859	10.875441593012143
50	3.9595950461844693	4.479722951249914	5.027673073512091	5.600189259231679	6.1942036869224	6.807315506626785	7.789890233616817	8.29825040670293	8.821528856817316	9.35889906999334	9.909540496075119	10.473079209445665	11.623752777263892
100	4.0075477070720975	4.530614271140063	5.081246667615843	5.656209833204805	6.2524664290054766	6.867356622601294	7.8840753016595135	8.395383668945822	8.921470966490226	9.46151196800147	10.01468911199629	10.58032292450587	11.76234258423788
Dirichlet=∞	4.056808735623673	4.582894486773889	5.136293351566075	5.713791591748811	6.312382210373066	6.929332467265208	7.981671465147845	8.49609221699283	9.025162153579807	9.568058038577696	10.123966119339658	10.692091305197334	11.907979798493512

Valeurs approchées asymptotiques des racines de l'équation déterminantale

Comme le calcul des valeurs approchées a déjà été réalisé dans le cas le plus général du cylindre creux avec deux échanges intérieur et extérieur, il vient :

$$\nu(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)Cos\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)=(\alpha_1\alpha_2\nu^2-\beta_1\beta_2)Sin\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)$$

$$\alpha_1\to 0 \qquad \beta_1\to 1 \qquad \alpha_2\to\alpha \qquad \beta_2\to\beta \Rightarrow -\nu\alpha=\beta Tan\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)$$

Je donne également l'expression approchée des termes de la matrice diagonale :

$$q>>0\begin{cases} Je_{2n}(x,q)\approx\frac{ce_{2n}(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Cos(\gamma(\nu,x)) \quad Ne_{2n}(x,q)\approx\frac{ce_{2n}(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Sin(\gamma(\nu,x)) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_2)-Cos(2\theta)}}\approx\frac{\delta_{n,p}}{\sqrt{2}Cosh(\eta_2)} \\ Je_{2n}'(x,q)\approx -ce_{2n}(0,q)\nu c\sqrt{Cosh(x)}Sin(\gamma(\nu,x)) \quad Ne_{2n}'(x,q)\approx ce_{2n}(0,q)\nu c\sqrt{Cosh(x)}Cos(\gamma(\nu,x)) \end{cases}$$

$$E_{2n,2p}\approx\delta_{n,p}\left\{\beta c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}+\frac{\alpha}{Cosh(\eta_2)}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\right\}$$

$$Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\approx-\frac{(ce_{2n}(0,q))^2}{\sqrt{Cosh(\eta_1)Cosh(\eta_2)}}Sin(\gamma(\nu,\eta_2)-\gamma(\nu,\eta_1))$$

$$Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\approx-\nu c(ce_{2n}(0,q))^2\sqrt{\frac{Cosh(\eta_2)}{Cosh(\eta_1)}}Cos(\gamma(\nu,\eta_2)-\gamma(\nu,\eta_1))$$

$$E_{2n,2p}\approx-\delta_{n,p}\nu c\frac{(ce_{2n}(0,q))^2}{\sqrt{Cosh(\eta_1)Cosh(\eta_2)}}\left\{\frac{\beta}{\nu}Sin(\gamma(\nu,\eta_2)-\gamma(\nu,\eta_1))+\alpha Cos(\gamma(\nu,\eta_2)-\gamma(\nu,\eta_1))\right\}$$

<u>Expression de la solution du problème aux limites sur le cylindre elliptique creux : Robin homogène extérieur, Dirichlet homogène intérieur</u>

Sachant que sur ce type problème aux limites (réchauffement, refroidissement), il convient d'utiliser la propriété d'orthogonalité bidimensionnelles du produit des fonctions propres radiales et angulaires de Mathieu (voir également le problème aux limites de l'équation de Laplace sur un cylindre à section elliptique), alors la forme de la solution est la suivante :

$$(1)\quad \textit{Réchauffement}\quad C.L.\quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=\eta_1}=0\quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Bigg|_{\eta=\eta_2}=\beta\, T_0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=0\quad Posons\quad (\nu_{2n,m})^2=\frac{4q_{2n,m}}{c^2}$$

$$B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left\{Ne_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left\{Ne_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}^2\left(ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})\right)^2}$$

$$(1)\Rightarrow \frac{T_0-T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

$$(2)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=\eta_1}=0\quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Bigg|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0$$

$$(2)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

$$(3)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=\eta_1}=0\quad \frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Bigg|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0(\eta,\theta)\quad tq\quad \begin{cases}T_0(\eta,-\theta)=T_0(\eta,\theta)\\ T_0(\eta,\pi-\theta)=T_0(\eta,\theta)\end{cases}$$

$$B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)T_0(\eta,\theta)\left\{Ne_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left\{Ne_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_1,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\right\}^2\left(ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})\right)^2}$$

$$(3)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}\left(\eta_1,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

Etude d'un problème transitoire de diffusion en coordonnées elliptiques avec conditions aux limites de Robin et de Neumann: cylindre creux de longueur infinie de section elliptique soumis à des conditions initiales de température fixe T_0, et une condition aux limites de Robin homogènes de température sur la surface intérieure et condition homogène de Neumann sur la surface extérieure, problème de refroidissement

Le régime transitoire est solution du problème suivant :

$$\Delta T_t(\eta,\theta,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial t}=0 \quad C.L. \quad -\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}+\beta\, T_t(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_1}=0 \quad \frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=\eta_2}=0 \quad C.I \quad T_t(\eta,\theta,0)=T_0$$

Équation déterminantale

$$\text{Indice de Kronecker} \quad \delta_{i,j} \quad G_l\left(\eta,\frac{1}{2}\right)==\frac{2\sqrt{2}}{\pi(1+\partial_{l,0})}Q_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(\eta)) \quad \Psi^{(j)}_{2p,2n}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A^{(2p)}_{2l}(q)\left\{A^{(2n)}_{2(l+j)}(q)(1+\delta_{l+j,0})+A^{(2n)}_{2|l-j|}(q)(1+\delta_{|l-j|,0})\right\}$$

$$\begin{cases} E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ -\frac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}\end{array}\right\} \\ E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ -\frac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_1))}{(1+\partial_{j,0})}\Psi^{(j)}_{2p,2n}(q)\end{array}\right\}\end{cases} \Leftrightarrow \Delta=\begin{vmatrix} E_{0,0} & E_{0,2} & E_{0,4} & \dots & \dots \\ E_{2,0} & E_{2,2} & E_{2,4} & \dots & \dots \\ E_{4,0} & E_{4,2} & E_{4,4} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=0$$

Valeurs approchées asymptotiques des racines de l'équation déterminantale

$$\nu(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)Cos\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)=(\alpha_1\alpha_2\nu^2-\beta_1\beta_2)Sin\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)$$

$$\alpha_2\to 1 \qquad \beta_2\to 0 \qquad \alpha_1\to\alpha \qquad \beta_1\to\beta\Rightarrow \nu\alpha Tan\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)$$

Je donne également l'expression approchée des termes de la matrice diagonale à partir de l'expression originale :

$$\frac{E_{2n,2p}}{c}=\left\{\begin{array}{l}\beta\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ -\frac{\alpha\sqrt{2}}{c}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}\end{array}\right\}$$

$$\text{Indice de Kronecker} \quad \delta_{n,p} \quad G_l\left(2\eta_1,\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi(1+\partial_{l,0})}Q_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_1)) \quad \Psi^{(j)}_{2p,2n}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A^{(2p)}_{2l}(q)\left\{A^{(2n)}_{2(l+j)}(q)(1+\delta_{l+j,0})+A^{(2n)}_{2|l-j|}(q)(1+\delta_{|l-j|,0})\right\}$$

$$\Phi_{p,n}(q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}=\sum_{j=0}^{j=\infty}G_l\left(2\eta_1,\frac{1}{2}\right)\Psi^{(j)}_{2p,2n}(q)$$

$$\frac{E_{2n,2p}}{c}=\beta\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}-\frac{\alpha\sqrt{2}}{c}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}\Phi_{p,n}(q)$$

Il vient :

Problème aux limites avec conditions initiales pour l' équation de la chaleur (diffusion) – p

$$Posons \qquad q=\frac{v^2c^2}{4}>>0 \Rightarrow 2\sqrt{q}=vc \quad et \qquad \gamma(v,x)=vcSinh(x)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$Lorsque \quad q>>0 \quad valeur\ significative\ ce_{2p}(\theta,q) \quad pour \quad \theta\approx\frac{\pi}{2}$$

$$\Phi_{p,n}(q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}=\frac{2}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}\approx\frac{2}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)+1}}\approx\frac{\delta_{n,p}}{\sqrt{2}Cosh(\eta_1)}$$

$$q>>0 \quad \begin{cases} Je_{2n}(x,q)\approx\dfrac{ce_{2n}(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Cos(\gamma(v,x)) \qquad Ne_{2n}(x,q)\approx\dfrac{ce_{2n}(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Sin(\gamma(v,x)) \\ Je_{2n}'(x,q)\approx -ce_{2n}(0,q)vc\sqrt{Cosh(x)}Sin(\gamma(v,x)) \qquad Ne_{2n}'(x,q)\approx ce_{2n}(0,q)vc\sqrt{Cosh(x)}Cos(\gamma(v,x)) \end{cases}$$

$$Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\approx -vc(ce_{2n}(0,q))^2\sqrt{\frac{Cosh(\eta_2)}{Cosh(\eta_1)}}Cos(\gamma(v,\eta_1)-\gamma(v,\eta_2))$$

$$Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\approx v^2c^2(ce_{2n}(0,q))^2\sqrt{Cosh(\eta_1)Cosh(\eta_2)}Sin(\gamma(v,\eta_1)-\gamma(v,\eta_2))$$

$$\frac{E_{2n,2p}}{c}\approx\beta\delta_{n,p}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}-\frac{\alpha}{c}\frac{\delta_{n,p}}{Cosh(\eta_1)}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}'(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}'(\eta_2,q)\right\}$$

$$\frac{E_{2n,2p}}{c}\approx v^2c(ce_{2n}(0,q))^2\sqrt{\frac{Cosh(\eta_2)}{Cosh(\eta_1)}}\delta_{n,p}\left\{\alpha Sin(\gamma(v,\eta_2)-\gamma(v,\eta_1))-\frac{\beta}{v}Cos(\gamma(v,\eta_1)-\gamma(v,\eta_2))\right\}$$

<u>*Valeurs propres approchées pour diverses paramètres de la condition de Robin*</u>

Le schéma de résolution numérique des racines de l'équation déterminantale est identique à celui du cylindre elliptique plein. Pour la recherche des racines, on augmente la taille du déterminant (une taille de 6x6 suffit amplement en partant de 1x1) et l'on constate une rapide convergence. Cela permet également de repérer les indices 2n et m des diverses racines trouvées qui apparaissent progressivement lors de l'augmentation du déterminant. Pour repérer les valeurs 2n et m, il suffit de partir du déterminant simplifié à la diagonale principale de la matrice qui devient alors une simple équation transcendantale pour chaque valeur de n et qui par résolution numérique donne les valeurs approximatives autour desquelles la convergence s'effectue et par retour permet d'identifier la valeur de n et m dans la résolution approchée de l'équation déterminantale

Voici les 13 premières valeurs approchées des racines v de l'équation déterminantale, pour un cylindre elliptique creux de dimensions : a2=2, b2=1, b1=2b2/10=0.2, c=√3, η2=ArcCosh(a2/c)=0.549306, η1=ArcSinh(b1/c)=0.115215, a1=c Cosh(η1)=1.74356 :

h=β/α	0,1	2,1	4,1	0,2	6,1	2,2	8,1	4,2	10,1	6,2	0,3	8,2	2,3
Neumann=0	0	1.6549802630341075	3.1209208908385224	4.166373090488708	4.575247804914871	5.2646293556632004	6.016743773866749	6.4519879806680285	7.4391844035703985	7.707725756450133	8.10171281130096	9.010983434933577	9.163821567979738
1	1.0512239557676437	1.9837783240591	3.2773946012714 72	4.452916666108193	4.661640196631015	5.5248799648700 38	6.0653304476236505	6.6886857332736 44	7.4613028879098575	7.9228590597543 77	8.2552473428800 9	9.2039989119361 55	9.3093454308120 98
2	1.3527857154446865	2.1976787614061335	3.3871315366374732	4.686148631963886	4.722551988823184	5.7409367448013 08	6.0996601032857 67	6.8868575359929 35	7.4782019482752 96	8.1033264217520 64	8.3990314928961 67	9.3673510525285 21	9.4462710522909 27
10	1.9033608247502918	2.8053434435373 26	3.7667377359216014	5.5117692094623365	4.931404170693328	6.5502186301130 33	6.2166469451427 17	7.6616583181472 29	7.5440950932875 28	8.8321658375280 86	9.1472754460260 3	10.039597230267367	10.176369797527759
50	2.0905085864420077	3.0954656491497503	4.0763045033432 11	5.9820008836072684	5.1234192026527 25	7.0428601261018726	6.3227869973043 27	8.1668267368832 09	7.6089075039839 56	9.3414255453307 98	9.8232048190596 03	10.554652559574913	10.866750382524675
100	2.1165126591613572	3.1370899084794175	4.1364501509705 27	6.0536452140215 62	5.1708627550508 47	7.1191383266627 53	6.3499450436825 67	8.2467503773639 07	7.6244977479622 36	9.4241985959 7474	9.9401709383012 96	10.639929410361063	10.988373034877645
Dirichlet=∞	2.1431175617974225	3.1794449132946685	4.2031270506583835	6.1276152020 93706	5.2304773301 58783	7.1980084399 23033	6.3854118107 83262	8.3295960293 51967	7.6453716271 87594	9.5102826886 65772	10.062315546689133	10.728973493197238	11.115615780936066

Problème aux limites avec conditions initiales pour l' équation de la chaleur (diffusion) – p

Voici les 14 premières valeurs approchées des racines v de l'équation déterminantale, pour un cylindre elliptique creux de dimensions : a2=4, b2=1, b1=2b2/10=0.2, c=√15, η2=ArcCosh(a2/c)=0.255413, η1=ArcSinh(b1/c)=0.0516169, a1=c Cosh(η1)=3.87814 :

h=β/α	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3	2,3
0	0	0.8600685239343298	1.6334815728700827	2.4018460421812226	3.1681119814820717	3.9332232673113485	4.0484636109901395	4.5725334056422999	5.1237661190397177	5.6990168770857775	6.2953591162933312	6.9101496886844475	7.9776346423197758	8.4915740804555552
1	1.0693039724566682	1.5069194677868734	2.0570105217652808	2.6990798421428486	3.3896773744445121	4.0538419986259 6	4.3362555210305 38	4.8450625119821 02	5.3814953765390 1	5.9426774793700 74	6.5258378204892 25	7.1248651628987 32	8.1318447952725 15	8.6412146834021 61
2	1.3506904738765562	1.8087065129332265	2.3250265959202205	2.9082882812568975	3.5468052924397786	4.1592837502302 86	4.5709159925025 74	5.0707916185310 76	5.5977531044805 07	6.1493041561340 05	6.7229501836393 32	7.3134228882462 98	8.2763154643602 13	8.7818512290680 6
10	1.8519777917321 42	2.3641023464006525	2.9221126182197 37	3.5081567135477 85	4.1024937614122 59	4.7148333977529 165	5.3992165400236 3	5.8959981350606 67	6.4144554275244 24	6.9531079418863 11	7.5104547964186	8.0889445148353 99	9.0273869179359 96	9.5240922665855 02
50	2.0255701980332805	2.5571601728448186	3.1338544523887224	3.7436923269702 88	4.3764406428770 96	5.0251870845173 97	5.8674469992822 33	6.3789780209865 14	6.9099456859042 55	7.4588987650126475	8.0244184451069 42	8.6056404539922 22	9.7026159704321 75	10.2086903796007
100	2.0499397440092926	2.5842566613904 32	3.1633916718826978	3.7758236581251547	4.4119900130432 04	5.0645180887827 68	5.9385679517008 18	6.4528560690721 84	6.9863598443329 95	7.5376299248686 46	8.1052528355722 129	8.6880114980460 07	9.8191086217962 46	10.3278785326223 71
∞	2.0749358227177477	2.6120381995203 2	3.1936368358786984	3.8085696782214233	4.4477933068184 48	5.1041673605813 88	6.0119505801197874	6.5291161513565665	7.0652853380833 75	7.6190118385466 97	8.1888889830051 59	8.7735725254010 54	9.9406761667314 92	10.4523607531394 3

<u>*Expression de la solution du problème aux limites sur le cylindre elliptique creux : Robin homogène intérieur, Neumann homogène extérieur*</u>

$$(1)\quad \textit{Réchauffement}\quad C.L.\quad -\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Big|_{\eta=\eta_1}=\beta\, T_0\quad \frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=0\quad \textit{Posons}\quad \left(v_{2n,m}\right)^2=\frac{4q_{2n,m}}{c^2}$$

$$B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_2,q_{2n,m}\right)Je_{2n}\left(\eta,q_{2n,m}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_2,q_{2n,m}\right)Ne_{2n}\left(\eta,q_{2n,m}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,q_{2n,m}\right)}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_2,q_{2n,m}\right)Je_{2n}\left(\eta,q_{2n,m}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_2,q_{2n,m}\right)Ne_{2n}\left(\eta,q_{2n,m}\right)\right\}^2\left(ce_{2n}\left(\theta,q_{2n,m}\right)\right)^2}$$

$$(1)\Rightarrow \frac{T_0-T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_2,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_2,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)e^{-\delta v_{2n,m}{}^2t}$$

$$(2)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad -\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Big|_{\eta=\eta_1}=0\quad \frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0$$

$$(2)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_2,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_2,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)e^{-\delta v_{2n,m}{}^2t}$$

$$(3)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad -\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Big|_{\eta=\eta_1}=0\quad \frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0(\eta,\theta)\quad tq\quad \begin{cases}T_0(\eta,-\theta)=T_0(\eta,\theta)\\ T_0(\eta,\pi-\theta)=T_0(\eta,\theta)\end{cases}$$

$$B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)T_0(\eta,\theta)\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_2,q_{2n,m}\right)Je_{2n}\left(\eta,q_{2n,m}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_2,q_{2n,m}\right)Ne_{2n}\left(\eta,q_{2n,m}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,q_{2n,m}\right)}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\left(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\right)\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_2,q_{2n,m}\right)Je_{2n}\left(\eta,q_{2n,m}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_2,q_{2n,m}\right)Ne_{2n}\left(\eta,q_{2n,m}\right)\right\}^2\left(ce_{2n}\left(\theta,q_{2n,m}\right)\right)^2}$$

$$(3)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}'\left(\eta_2,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}'\left(\eta_2,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{\left(v_{2n,m}\right)^2c^2}{4}\right)e^{-\delta v_{2n,m}{}^2t}$$

Etude d'un problème transitoire de diffusion en coordonnées elliptiques avec conditions aux limites de Robin et de Dirichlet: cylindre creux de longueur infinie de section elliptique soumis à des conditions initiales de température fixe T_0, et une condition aux limites de Robin homogènes de température sur la surface intérieure et condition homogène de Dirichlet sur la surface extérieure, problème de refroidissement

Le régime transitoire est solution du problème suivant :

$$\Delta T_t(\eta,\theta,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial t}=0 \quad C.L. \quad -\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T_t(\eta,\theta,t)}{\partial \eta}+\beta\, T_t(\eta,\theta,t)\Big|_{\eta=\eta_1}=0 \quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=\eta_2}=0 \quad C.I \quad T_t(\eta,\theta,0)=T_0$$

Sans rentrer dans le détail, étant donné que les calculs sont similaires à ce qui a été exposé précédemment, nous donnons l'expression de l'équation déterminantale et de la solution ainsi que quelques valeurs propres.

Équation déterminantale

$$\text{Indice de Kronecker} \quad \delta_{i,j} \quad G_l\left(\eta,\frac{1}{2}\right)==\frac{2\sqrt{2}}{\pi\left(1+\partial_{l,0}\right)}Q_{l-\frac{1}{2}}\left(Cosh(\eta)\right) \quad \Psi^{(j)}_{2p,2n}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A^{(2p)}_{2l}(q)\left\{A^{(2n)}_{2(l+j)}(q)\left(1+\delta_{l+j,0}\right)+A^{(2n)}_{2|l-j|}(q)\left(1+\delta_{|l-j|,0}\right)\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ -\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\displaystyle\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\,\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}\end{array}\right\}\\ E_{2n,2p}=\left\{\begin{array}{l}\beta\, c\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ -\dfrac{4\alpha}{\pi}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\displaystyle\sum_{j=0}^{j=\infty}\frac{Q_{j-\frac{1}{2}}\left(Cosh(2\eta_1)\right)}{\left(1+\partial_{j,0}\right)}\Psi^{(j)}_{2p,2n}(q)\end{array}\right\}\end{array}\right. \Leftrightarrow \Delta=\begin{vmatrix} E_{0,0} & E_{0,2} & E_{0,4} & \dots & \dots\\ E_{2,0} & E_{2,2} & E_{2,4} & \dots & \dots\\ E_{4,0} & E_{4,2} & E_{4,4} & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{vmatrix}=0$$

Valeurs approchées asymptotiques des racines de l'équation déterminantale

$$\nu(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)Cos\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)=(\alpha_1\alpha_2\nu^2-\beta_1\beta_2)Sin\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)$$

$$\alpha_2\to 0 \qquad \beta_2\to 1 \qquad \alpha_1\to\alpha \qquad \beta_1\to\beta\Rightarrow -\nu\alpha=\beta\, Tan\left(\nu c(Sinh(\eta_2)-Sinh(\eta_1))-(4n+1)ArcTan\left(\frac{Sinh\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)}{Cosh\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)}\right)\right)$$

Je donne également l'expression approchée des termes de la matrice diagonale à partir de l'expression originale :

$$\frac{E_{2n,2p}}{c}=\left\{\begin{array}{l}\beta\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}+\\ -\frac{\alpha\sqrt{2}}{c}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}\end{array}\right\}$$

$$Indice\ de\ Kronecker\quad \delta_{n,p}\quad G_l\left(2\eta_1,\frac{1}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi(1+\partial_{l,0})}Q_{l-\frac{1}{2}}(Cosh(2\eta_1))\quad \Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2p)}(q)\left\{A_{2(l+j)}^{(2n)}(q)(1+\delta_{l+j,0})+A_{2|l-j|}^{(2n)}(q)(1+\delta_{|l-j|,0})\right\}$$

$$\Phi_{p,n}(q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}=\sum_{j=0}^{j=\infty}G_l\left(2\eta_1,\frac{1}{2}\right)\Psi_{2p,2n}^{(j)}(q)$$

$$\frac{E_{2n,2p}}{c}=\beta\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\delta_{n,p}-\frac{\alpha\sqrt{2}}{c}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}\Phi_{p,n}(q)$$

Il vient :

$$Posons\qquad q=\frac{\nu^2c^2}{4}>>0\Rightarrow 2\sqrt{q}=\nu c\quad et\qquad \gamma(\nu,x)=\nu cSinh(x)-(4n+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$Lorsque\quad q>>0\quad valeur\ significative\ ce_{2p}(\theta,q)\quad pour\quad \theta\approx\frac{\pi}{2}$$

$$\Phi_{p,n}(q)=\frac{1}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}=\frac{2}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)-Cos(2\theta)}}\approx\frac{2}{\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi}d\theta\frac{ce_{2p}(\theta,q)ce_{2n}(\theta,q)}{\sqrt{Cosh(2\eta_1)+1}}\approx\frac{\delta_{n,p}}{\sqrt{2}Cosh(\eta_1)}$$

$$q>>0\quad\left\{\begin{array}{ll}Je_{2n}(x,q)\approx\frac{ce_{2n}(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Cos(\gamma(\nu,x)) & Ne_{2n}(x,q)\approx\frac{ce_{2n}(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}}Sin(\gamma(\nu,x))\\ Je_{2n}'(x,q)\approx -ce_{2n}(0,q)\nu c\sqrt{Cosh(x)}Sin(\gamma(\nu,x)) & Ne_{2n}'(x,q)\approx ce_{2n}(0,q)\nu c\sqrt{Cosh(x)}Cos(\gamma(\nu,x))\end{array}\right.$$

$$Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\approx\frac{(ce_{2n}(0,q))^2}{\sqrt{Cosh(\eta_1)Cosh(\eta_2)}}Sin(\gamma(\nu,\eta_1)-\gamma(\nu,\eta_2))$$

$$Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\approx\nu c(ce_{2n}(0,q))^2\sqrt{\frac{Cosh(\eta_1)}{Cosh(\eta_2)}}Cos(\gamma(\nu,\eta_1)-\gamma(\nu,\eta_2))$$

$$\frac{E_{2n,2p}}{c}\approx\beta\delta_{n,p}\left\{Ne_{2p}(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}-\frac{\alpha}{c}\frac{\delta_{n,p}}{Cosh(\eta_1)}\left\{Ne_{2p}'(\eta_1,q)Je_{2p}(\eta_2,q)-Je_{2p}'(\eta_1,q)Ne_{2p}(\eta_2,q)\right\}$$

$$\frac{E_{2n,2p}}{c}\approx-\delta_{n,p}\frac{(ce_{2n}(0,q))^2}{\sqrt{Cosh(\eta_1)Cosh(\eta_2)}}\left\{\alpha\nu Cos(\gamma(\nu,\eta_1)-\gamma(\nu,\eta_2))+\beta Sin(\gamma(\nu,\eta_2)-\gamma(\nu,\eta_1))\right\}$$

<u>Valeurs propres approchées pour diverses paramètres de la condition de Robin</u>

Le schéma de résolution numérique des racines de l'équation déterminantale est identique à celui du cylindre elliptique plein. Pour la recherche des racines, on augmente la taille du déterminant (une taille de 6x6 suffit amplement en partant de 1x1) et l'on constate une rapide convergence. Cela permet également de repérer les indices 2n et m des diverses racines trouvées qui apparaissent progressivement lors de l'augmentation du déterminant. Pour repérer les valeurs 2n et m, il suffit de partir du déterminant simplifié à la diagonale principale de la matrice qui devient alors une simple équation transcendantale pour chaque valeur de n et qui par résolution numérique donne les valeurs approximatives autour desquelles la convergence s'effectue et par retour permet d'identifier la valeur de n et m dans la résolution approchée de l'équation déterminantale

Voici les 13 premières valeurs approchées des racines v de l'équation déterminantale, pour un cylindre elliptique creux de dimensions : a2=2, b2=1, b1=2b2/10=0.2, c=√3, η2=ArcCosh(a2/c)=0.549306, η1=ArcSinh(b1/c)=0.115215, a1=c Cosh(η1)=1.74356 :

h=β/α	0,1	2,1	4,1	6,1	0,2	2,2	8,1	4,2	10,1	6,2	0,3	8,2	2,3
Neumann=0	2.285269885255015	3.5039680873279297	4.818448009119476	6.159157298070016	6.163971329935827	7.245367372006828	7.511032469358121	8.389129706481762	8.890546159861806	9.583822329179606	10.083386994270558	10.820166098451352429317	11.140471802429317
1	2.730951615982942	3.856604014950094	5.095822293363135	6.327507955999218	6.376274569104087	7.430362737261331	7.676547404430591	8.562047510976447	8.984251676 83855	9.746493614406832	10.207082303533362	10.973869404622041	11.258785379473313
2	3.0186944653112673	4.106399142816423	5.304497964051984	6.480226556096293	6.546226902 27915	7.598145749453093	7.808300248941805	8.719683488160044	9.065610109465041	9.894997635659179	10.325526916462184	11.104219064701054	11.372388898759151
10	3.767963748416863	4.837682982014911	5.988591348945424	7.170435934 7089275	7.340491641357544	8.377228872412632	8.339373702724805	9.471731930233311	9.467756700379999	10.616006367084555	11.010536935 87262	11.802489543 17245	12.040648134732931
50	4.100120430962816	5.193600661516646	6.362362119137556	7.570164801405839	7.924412890546644	8.979003060368367	8.774931796687113	10.08398590816908	9.933160907797957	11.232048799224124	11.756461937659873	12.416505137593685	12.797101571783072
100	4.1484449063132836	5.2462302731081065	6.418896696518913	7.632725315846852	8.018921355135689	9.078116549568778	8.849886627692873	10.186909906073886	10.02771090713214	11.338035738581956	11.895286627476677	12.524885719996503	12.940475608563538
Dirichlet=∞	4.1981638600308795	5.30046497638729	6.477254229676155	7.697271626899352	8.116994733897029	9.181139517158192	8.927401946618213	10.294142981152813	10.12814860641574	11.448797928204636	12.041383202677261	12.638577778589947	13.091681597936232

Voici les 13 premières valeurs approchées des racines v de l'équation déterminantale, pour un cylindre elliptique creux de dimensions : a2=4, b2=1, b1=2b2/10=0.2, c=√15, η2=ArcCosh(a2/c)=0.255413, η1=ArcSinh(b1/c)=0.0516169, a1=c Cosh(η1)=3.87814 :

h=β/α	0,1	2,1	4,1	6,1	8,1	10,1	0,2	2,2	4,2	6,2	8,2	10,2	0,3
Neumann=0	2.1029292423632047	2.6557065581610604	3.256818387687335	3.8948586195989936	4.5606779957733385	5.247285645937733	6.020348393909971	6.538932320561767	7.076635043201138	7.632001463293418	8.203614902150292	8.790120379419163	9.945625632696729
1	2.573939906849599	3.0830390446281433	3.640945658 1007085	4.239134069262157	4.869529970 9905715	5.512309782382951	6.221489097368175	6.732282293 96942	7.262387066 3772285	7.810408465325529	8.374972228609296	8.953246708497186	10.070116145752216
2	2.871573885 5575736	3.367622544 4200156	3.908126458 29705	4.487039275024213	5.098013983886965	5.727832095859684	6.402132864314611	6.907071125260652	7.431262836840186	7.973402726291639	8.532188063588492	9.104672016671682	10.189333792952628
10	3.629598473 3574613	4.133601566049838	4.668793077 31413	5.231850869094859	5.819488732595894	6.433207980202812	7.207018695975533	7.703904409296227	8.217536722 76333	8.747059630 33033	9.291594264638224	9.852882695605162	10.877959086623571
50	3.959777688879359	4.480412296606796	5.029019253 4873785	5.602355465543803	6.197364735333115	6.811702881956614	7.790132367405424	8.298933033 84769	8.822719187 43873	9.360667440710442	9.911960291723142	10.476288136444735	11.624053756566315
100	4.007621118682493	4.530936845550383	5.081890728963092	5.657253362 77805	6.253992212852875	6.869465357 59233	7.884163122205401	8.395691495042398	8.922032063 40622	9.462361097078935	10.015862436864404	10.581875572 92349	11.762446680728088
Dirichlet=∞	4.056808735623676	4.582894486773951	5.136293351566064	5.713791591748694	6.312382210374957	6.929332467273137	7.981671465147755	8.496092216992913	9.025162153579643	9.568058038577641	10.123966119339308	10.692091305197334	11.907979798493512

Expression de la solution du problème aux limites sur le cylindre elliptique creux : Robin homogène intérieur, Dirichlet homogène extérieur

$$(1)\quad \textit{Réchauffement}\quad C.L.\quad -\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Bigg|_{\eta=\eta_1}=\beta\, T_0\quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=0\quad Posons\quad (\nu_{2n,m})^2=\frac{4q_{2n,m}}{c^2}$$

$$B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\big(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\big)\big\{Ne_{2n}(\eta_2,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_2,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\big\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\big(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\big)\big\{Ne_{2n}(\eta_2,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_2,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\big\}^2\big(ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})\big)^2}$$

$$(1)\Rightarrow \frac{T_0-T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}\left(\eta_2,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}\left(\eta_2,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

$$(2)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad -\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Bigg|_{\eta=\eta_1}=0\quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0$$

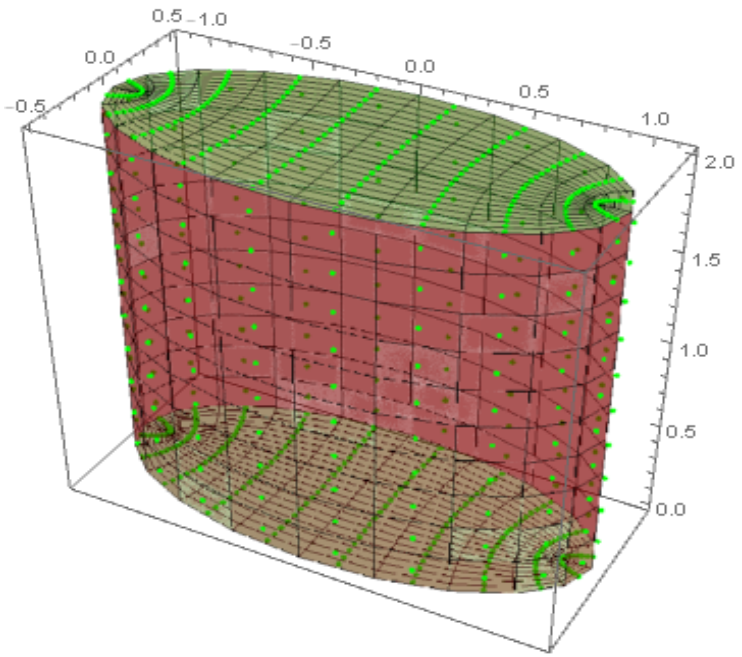
$$(2)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}\left(\eta_2,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}\left(\eta_2,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

$$(3)\quad \textit{Refroidissement}\quad C.L.\quad -\frac{\alpha}{c\sqrt{Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)}}\frac{\partial T}{\partial \eta}+\beta\, T\Bigg|_{\eta=\eta_1}=0\quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=\eta_2}=0\quad C.I\quad T(\eta,\theta,0)=T_0(\eta,\theta)\quad tq\quad \begin{cases}T_0(\eta,-\theta)=T_0(\eta,\theta)\\ T_0(\eta,\pi-\theta)=T_0(\eta,\theta)\end{cases}$$

$$B_{2n}=\frac{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\big(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\big)T_0(\eta,\theta)\big\{Ne_{2n}(\eta_2,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_2,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\big\}ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})}{\int_0^{l_\eta}\int_0^{2\pi} d\eta\, d\theta\big(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta)\big)\big\{Ne_{2n}(\eta_2,q_{2n,m})Je_{2n}(\eta,q_{2n,m})-Je_{2n}(\eta_2,q_{2n,m})Ne_{2n}(\eta,q_{2n,m})\big\}^2\big(ce_{2n}(\theta,q_{2n,m})\big)^2}$$

$$(3)\Rightarrow \frac{T(\eta,\theta,t)}{T_0}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{m=1}^{m=+\infty}B_{2n}\left\{Ne_{2n}\left(\eta_2,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Je_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)-Je_{2n}\left(\eta_2,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)Ne_{2n}\left(\eta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)\right\}ce_{2n}\left(\theta,\frac{(\nu_{2n,m})^2c^2}{4}\right)e^{-\delta\nu_{2n,m}{}^2t}$$

Problème de diffusion en coordonnées elliptiques cylindriques à trois dimensions



On a vu que le système elliptique polaire est défini par le changement de variable :

$$x = c\ Cosh(\eta)\ Cos(\vartheta)$$
$$y = c\ Sinh(\eta)\ Cos(\vartheta) \qquad z$$

Les variables η, ϑ sont respectivement les variables radiale et angulaire, z la hauteur et c est un paramètre d'échelle. Le Laplacien en coordonnées elliptiques cylindriques 3D (η,θ,z) s'écrit sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta,z,t) = \frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta) - Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,z,t)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T(\eta,\theta,z,t)}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\partial^2 T(\eta,\theta,z,t)}{\partial z^2}$$

L'équation de diffusion s'écrit donc :

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta) - Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\eta,\theta,z,t)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 T(\eta,\theta,z,t)}{\partial \theta^2}\right) + \frac{\partial^2 T(\eta,\theta,z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,z,t)}{\partial t} = 0$$

$$(\eta,\theta,z) \in \Omega \text{ de frontière } \partial\Omega \qquad \begin{cases} C.L. \quad \beta\, T(\eta,\theta,z,t) + \alpha \left.\dfrac{\partial T(\eta,\theta,z,t)}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = f_{\partial\Omega}(\eta,\theta,z) \\ C.I \quad T(\eta,\theta,z,0) = T_0(\eta,\theta,z) \end{cases}$$

Par séparation des variables la solution de l'équation s'écrit :

$$T(\eta,\theta,z,t)=U(\eta,\theta,z)D(t)$$

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2U(\eta,\theta,z)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2U(\eta,\theta,z)}{\partial\theta^2}\right)+\frac{\partial^2U(\eta,\theta,z)}{\partial z^2}+\mu_n^2\,U(\eta,\theta)=0\quad \mu_n>0$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{D'(t)}{D(t)}=-\mu_n^2\Rightarrow D(t)=e^{-\delta\mu_n^2t}\Rightarrow T(\eta,\theta,t)=\sum_{\mu_n,n=1,+\infty}a_n\,U_{\mu_n^2}(\eta,\theta,z)\,e^{-\delta\mu_n^2t}$$

Si l'on poursuit la séparation des variables sur les trois coordonnées radiale et angulaire et la hauteur :

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2U(\eta,\theta,z)}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2U(\eta,\theta,z)}{\partial\theta^2}\right)+\frac{\partial^2U(\eta,\theta,z)}{\partial z^2}+\mu^2U(\eta,\theta)=0\Leftarrow U(\eta,\theta)=R(\eta)\Theta(\theta)Z(z)$$

$$\Rightarrow\left\{\frac{\left(R''(\eta)\Theta(\theta)+R(\eta)\Theta''(\theta)\right)}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}+\mu^2R(\eta)\Theta(\theta)\right\}Z(z)+R(\eta)\Theta(\theta)Z''(z)=0\Rightarrow\frac{\left(\frac{R''(\eta)}{R(\eta)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}\right)}{c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)}+\mu^2=\tau^2=-\frac{Z''(z)}{Z(z)}$$

$$\Rightarrow Z''(z)+\tau^2Z(z)=0\quad\frac{R''(\eta)}{R(\eta)}+\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}=\left(\tau^2-\mu^2\right)c^2\left(Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)\right)\Rightarrow\frac{R''(\eta)}{R(\eta)}+\left(\mu^2-\tau^2\right)c^2Cosh^2(\eta)=\alpha_2=-\left(\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}-\left(\mu^2-\tau^2\right)c^2Cos^2(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\Theta''(\theta)+\left(\alpha_2-\frac{\left(\mu^2-\tau^2\right)c^2}{2}-2\frac{\left(\mu^2-\tau^2\right)c^2}{4}Cos(2\theta)\right)\Theta(\theta)=0\\ R''(\eta)-\left(\alpha_2-\frac{\left(\mu^2-\tau^2\right)c^2}{2}-2\frac{\left(\mu^2-\tau^2\right)c^2}{4}Cosh(2\eta)\right)R(\eta)=0\end{cases}$$

$$\textit{En posant } q=\frac{\left(\mu^2-\tau^2\right)c^2}{4}\ \textit{et}\ \lambda=\alpha_2-\frac{\left(\mu^2-\tau^2\right)c^2}{2}\Rightarrow\begin{cases}\Theta''(\theta)+\left(\lambda-2q\,Cos(2\theta)\right)\Theta(\theta)=0 & \textit{équation de Mathieu}\\ R''(\eta)-\left(\lambda-2q\,Cosh(2\eta)\right)R(\eta)=0 & \textit{équation de Mathieu modifiée}\end{cases}$$

<u>Problème de réchauffement ou de refroidissement à température constante :</u> *Cylindre de longueur z de section elliptique soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes de température T_0, problème de réchauffement. Le problème de refroidissement consiste en une condition initiale à température T_0 et une condition aux limites de Dirichlet homogène :*

$$\Delta T(\eta,\theta,z,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,z,t)}{\partial t}=0$$

$$\textit{Réchauffement}\quad \begin{cases} C.L. \quad T(\eta,\theta,z,t)\Big|_{\substack{\eta=\eta_0\\ z=0\\ z=h}}=T_0 \\ C.I \quad T(\eta,\theta,z,0)=0 \end{cases} \qquad \textit{Refroidissement}\quad \begin{cases} C.L. \quad T(\eta,\theta,z,t)\Big|_{\substack{\eta=\eta_0\\ z=0\\ z=h}}=0 \\ C.I \quad T(\eta,\theta,z,0)=T_0 \end{cases}$$

Les solutions des deux problèmes sont similaires, en ceci que le régime transitoire est l'inverse négatif de l'autre, et les régimes permanents sont triviaux soit T0, soit nul. Il suffit donc de considérer le problème aux conditions aux limites homogènes. De part ces dernières, la condition initiale et la configuration géométrique elliptique font que la solution recherchée doit être paire, et de période π en variable angulaire :

Soit $\forall t\ ,\ T_t(\eta,\theta,z,t)=T_t(\eta,-\theta,z,t) \quad et \quad T_t(\eta,\theta,z,t)=T_t(\eta,\theta+\pi,z,t)$

$$\Rightarrow U(\eta,\theta)=U(\eta,-\theta) \quad et \quad U(\eta,\theta)=U(\eta,\theta+\pi)$$

Par ailleurs les harmoniques en z sont des fonctions sinusoïdales :

$$Z''(z)+\tau^2 Z(z)=0 \Rightarrow Z_n(z)=Sin(\tau_n z) \qquad \tau_n=\frac{n\pi}{h}$$

D'après les propriétés des fonctions de Mathieu périodiques. La solution du régime transitoire est à rechercher sous la forme d'une série, à trois indices, lorsque l'on prend en compte les conditions aux limites homogènes de Dirichlet (chaque indice est intimement liés à la condition homogène dans chaque dimension). Par ailleurs la condition de régularité du gradient s'applique et impose de ne choisir que les fonctions de Mathieu angulaires et radiale de première espèce:

$$U_{\lambda_m}(\eta,\theta)=Je_{2m}(\eta,q)\,ce_{2m}(\theta,q) \qquad q=\frac{\left(\mu^2-\tau^2\right)c^2}{4}\Leftrightarrow \mu^2=\tau^2+\frac{4q}{c^2}=\frac{n^2\pi^2}{h^2}+\frac{4q}{c^2}$$

$$T_t(\eta,\theta,z,t)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty}B_{n,m,l}Je_{2m}\left(\eta,q_{2m,l}\right)ce_{2m}\left(\theta,q_{2m,l}\right)Sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)e^{-\delta\left(\frac{n^2\pi^2}{h^2}+\frac{4q_{m,l}}{c^2}\right)t}$$

$$\Leftrightarrow T_t(\eta,\theta,z,t)=\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty}Je_{2m}\left(\eta,q_{2m,l}\right)ce_{2m}\left(\theta,q_{2m,l}\right)\sum_{n=1}^{n=\infty}B_{n,m,l}Sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)e^{-\delta\left(\frac{n^2\pi^2}{h^2}+\frac{4q_{2m,l}}{c^2}\right)t}$$

Pour les deux fonctions de Mathieu et Mathieu modifiées, il est important de représenter ces fonctions comme décomposition de fonctions sinusoïdales pour la partie angulaire :

$$ce_{2n}(\theta,q)=\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}Cos(2l\,\theta)$$

$$\begin{cases} Je_{2n}(\eta,q)=\dfrac{ce_{2n}(0,q)}{A_0^{(2n)}}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty}A_{2l}^{(2n)}J_{2l}\left(2\sqrt{q}Sinh(\eta)\right)=\dfrac{ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{A_0^{(2n)}}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}J_{2l}\left(2\sqrt{q}Cosh(\eta)\right) \\ =\dfrac{ce_{2n}(0,q)ce_{2n}\left(\frac{\pi}{2},q\right)}{\left(A_0^{(2n)}\right)^2}\displaystyle\sum_{l=0}^{l=\infty}(-1)^l A_{2l}^{(2n)}J_{2l}\left(\sqrt{q}e^{-z}\right)J_{2l}\left(\sqrt{q}e^{z}\right) \end{cases}$$

Pour satisfaire à cette condition aux limites de Dirichlet, il suffit que $Je_{2m}(\eta_0,q)=0$*. Et le respect de ces conditions introduit une multiplicité supplémentaire des valeurs propres et fonctions propres admissibles dans le développement en série. Le troisième indice l est ainsi introduit, en le faisant varier de 1 à l'infini. Il représente toutes les valeurs admissibles de q tel que l'équation transcendante* $Je_{2m}(\eta_0,q)=0$ *soit vérifiée* $q_{2m,l}$ *tq* $Je_{2m}(\eta_0,q_{2m,l})=0$.

Il est important de constater que le système de fonctions propres de Mathieu est totalement indépendant en valeurs propres des valeurs propres axiales de la dimension hauteur. En cela on obtient donc un jeu identique de fonctions radiales et angulaires que pour le problème elliptique polaire. Donc nous reproduisons un exemple de valeurs propres obtenus déjà précédemment.

Exemple : soit une ellipse de grand et petit axe a,b, le paramètre ε=b/a se calcule comme suit et les valeurs propres sont les suivantes :

$$\varepsilon = \frac{b}{a} \Rightarrow Cosh(\eta_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \rightarrow Je_{2n}(\eta_0, q_{2m,l}) = 0$$

$$\mathrm{n} = 0 \Rightarrow Je_0(\eta_0, q_{0,l}) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{0,l} = 0.6659712,\ 3.8214069,\ 9.778336,\ 18.514175,\ 30.026436$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{0,l} = 2.675045,\ 18.664299,\ 49.500992,\ 95.145574,\ 155.59564$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{0,l} = 6.215625,\ 47.7875,\ 128.8875,\ 249.4625$$

$$\mathrm{n} = 1 \Rightarrow Je_2(\eta_0, q_{2,l}) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{2,l} = 2.7204526,\ 7.4232052,\ 14.937313,\ 25.291423,\ 38.432201$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{2,l} = 7.5213012,\ 28.022784,\ 63.729458,\ 114.28136\ \ 179.65104$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{2,\mathrm{l}} = 13.018683,\ 62.794186,\ 152.36748,\ 281.45415,\ 418.03752$$

$$\mathrm{n} = 2 \Rightarrow Je_4(\eta_0, q_{4,l}) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{4,l} = 6.1823218,\ 12.717788,\ 21.635037,\ 33.52658,\ 48.266678$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{4,l} = 15.63515,\ 40.148042,\ 80.589915,\ 135.98582,\ 206.23841$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{4,l} = 23.468485,\ 80.854477,\ 178.78862,\ 316.33769,\ 493.41248$$

$$\mathrm{n} = 3 \Rightarrow Je_6(\eta_0, q_{6,l}) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{5}{4} \Rightarrow \eta_0 = 1.098612 \quad q_{6,l} = 10.762775,\ 19.614843,\ 30.099482,\ 43.337054,\ 59.60616$$

$$\varepsilon = 2 \Rightarrow \eta_0 = 0.549306 \quad q_{6,l} = 27.134765,\ 55.25241,\ 100.23603,\ 160.37911,\ 235.45584$$

$$\varepsilon = 3 \Rightarrow \eta_0 = 0.346574 \quad q_{6,l} = 37.8625,\ 102.1875,\ 208.2875,\ 354.2125$$

Les expressions asymptotiques de Goldstein donnent des valeurs approchées de ces racines pour q grand, prise au seul premier terme de développement, des fonctions de Mathieu radiales d'ordre entier (voir A.Erdelyi H.Bateman HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS_VOL_III, formule 7 section 16.7 page 127), ainsi que MachLaclan Theory and Application of Mathieu Functions, additionnal results 6, page 385, formules (1,2) pour la fonction Je:

$$Je_m(x,q) \approx \frac{ce_m(0,q)}{\sqrt{Cosh(x)}} Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(x) - (2m+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) \qquad q \quad très \quad grand$$

$$Avec \quad ArcTan\left(Tanh\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} ArcTan(Sinh(x))$$

L'expression de Goldstein ne met en jeu que des fonctions élémentaires, et il est facile d'obtenir des expressions approchées des racines d'une équation transcendantale. Prenons pour une condition aux limites $U(\eta,\theta)|_{\eta=\eta_0} = 0$*, la première équation* $Cosh(\eta_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}} \rightarrow Je_{2m}(\eta_0, q) = 0$.

L'équation transcendantale se réduit à une simple expression :

$$Cos\left(2\sqrt{q}Sinh(\eta_0)-(4m+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)\right)=0 \Rightarrow \sqrt{q_{2m,l}}=\frac{\pi\frac{2l+1}{2}+(4m+1)ArcTan\left(Tanh\left(\frac{\eta_0}{2}\right)\right)}{2Sinh(\eta_0)}$$

Pour respecter maintenant la condition initiale (en utilisant déjà l'orthogonalité des fonctions sinusoïdales axiales) , il vient :

$$T_0=\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty}Je_{2m}(\eta,q_{2m,l})ce_{2m}(\theta,q_{2m,l})\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{B_{n,m,l}}{n}Sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)Sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)$$

Pour déterminer les coefficients $B_{n,m,l}$, je vais également utiliser les formules d'orthogonalité des fonctions de Mathieu et:

$$B_{n,m,l}=\frac{\int_0^{\eta_0}\int_0^{2\pi}d\eta\, d\theta\, Je_{2m}(\eta,q_{2m,l})ce_{2m}(\theta,q_{2m,l})(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))}{\int_0^{\eta_0}\int_0^{2\pi}d\eta\, d\theta\,(Je_{2m}(\eta,q_{2m,l}))^2\,(ce_{2m}(\theta,q_{2m,l}))^2(Cosh(2\eta)-Cos(2\theta))}$$

Cela donne donc comme solution du problème de réchauffement et de refroidissement :

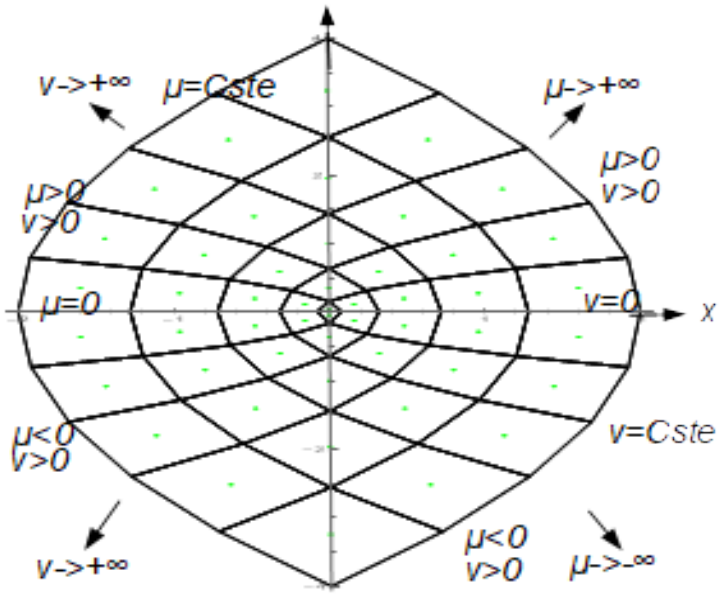
$$Réchauffement\quad\begin{cases}C.L. & T(\eta,\theta,z,t)\big|_{\substack{\eta=\eta_0\\z=0\\z=h}}=T_0\\ C.I & T(\eta,\theta,z,0)=0\end{cases}$$

$$T(\eta,\theta,z,t)=T_0\left(1-\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty}Je_{2m}(\eta,q_{2m,l})ce_{2m}(\theta,q_{2m,l})\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{B_{n,m,l}}{n}Sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)Sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)e^{-\delta\left(\frac{n^2\pi^2}{h^2}+\frac{4q_{2m,l}}{c^2}\right)t}\right)$$

$$Refroidissement\quad\begin{cases}C.L. & T(\eta,\theta,z,t)\big|_{\substack{\eta=\eta_0\\z=0\\z=h}}=0\\ C.I & T(\eta,\theta,z,0)=T_0\end{cases}$$

$$T(\eta,\theta,z,t)=T_0\frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{m=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty}Je_{2m}(\eta,q_{2m,l})ce_{2m}(\theta,q_{2m,l})\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{B_{n,m,l}}{n}Sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)Sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)e^{-\delta\left(\frac{n^2\pi^2}{h^2}+\frac{4q_{2m,l}}{c^2}\right)t}$$

Problème de diffusion en coordonnées paraboliques polaires à deux dimensions



Le système parabolique polaire est défini par le changement de variable $x = a\dfrac{\mu^2 - \nu^2}{2}$ $\quad y = a\,\mu\,\nu$

où μ,v sont les coordonnées paraboliques représentant un système de paraboles orthogonales entre elles et a un facteur d'échelle. Le Laplacien et l'équation de diffusion s'écrivent en coordonnées parabolique 2D (μ,v) sous la forme :

$$\frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,t)}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,t)}{\partial\nu^2}\right)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\mu,\nu,t)}{\partial t}=0 \quad (\mu,\nu)\in\Omega \text{ de frontière } \partial\Omega$$

$$\left\{ C.L. \quad \alpha\, T(\mu,\nu,t)+\beta\left.\frac{\partial T(\mu,\nu,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f_{\partial\Omega}(\mu,\nu) \quad C.I \quad T(\mu,\nu,0)=T_0(\mu,\nu)\right.$$

Par séparation des variables la solution de l'équation s'écrit :

$$T(\mu,\nu,t)=U(\mu,\nu)D(t) \qquad \frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 U(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 U(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}\right)+\lambda_n^2\, U(\mu,\nu)=0 \quad \lambda_n>0$$

$$\frac{1}{\delta}\frac{D'(t)}{D(t)}=-\lambda_n^2 \Rightarrow D(t)=e^{-\delta\lambda_n^2 t} \Rightarrow T(\mu,\nu,t)=\sum_{\mu_n,n=1,+\infty} a_n\, U_{\lambda_n^2}(\mu,\nu)\, e^{-\delta\lambda_n^2 t}$$

Si l'on poursuit la séparation des variables sur les deux coordonnées :

$$\frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 U(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 U(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}\right)+\lambda^2\,U(\mu,\nu)=0 \Leftarrow U(\mu,\nu)=R(\mu)\Theta(\nu)$$

$$\Rightarrow \frac{R''(\mu)}{R(\mu)}+\frac{\Theta''(\nu)}{\Theta(\nu)}=-\lambda^2a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)\Rightarrow \frac{R''(\mu)}{R(\mu)}+\lambda^2a^2\mu^2=-\left(\frac{\Theta''(\nu)}{\Theta(\nu)}+\lambda^2a^2\nu^2\right)=\pm\beta^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R''(\mu)-(\pm|\alpha_2|-\lambda^2a^2\mu^2)R(\mu)=0 \\ \Theta''(\nu)+(\pm|\alpha_2|+\lambda^2a^2\nu^2)\Theta(\nu)=0 \end{cases} \qquad \lambda^2a^2=\alpha^2 \qquad \begin{cases} R''(\mu)-\left(\pm\beta^2-\alpha^2\mu^2\right)R(\mu)=0 \\ \Theta''(\nu)+\left(\pm\beta^2+\alpha^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0 \end{cases} \quad \textit{équations de propagation de Bessel}$$

$$Choix+\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} R''(\mu)-\left(\beta^2-\alpha^2\mu^2\right)R(\mu)=0 \Rightarrow R(\mu)=\sqrt{\mu}\left(A_\mu I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)+B_\mu I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\right) \\ \Theta''(\nu)+\left(\beta^2+\alpha^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0 \Rightarrow \Theta(\nu)=\sqrt{\nu}\left(A_\nu J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)+B_\nu J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\right) \end{cases}$$

$$Choix-\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} R''(\mu)+\left(\beta^2+\alpha^2\mu^2\right)R(\mu)=0 \Rightarrow R(\mu)=\sqrt{\mu}\left(A_\mu J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)+B_\mu J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\right) \\ \Theta''(\nu)-\left(\beta^2-\alpha^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0 \Rightarrow \Theta(\nu)=\sqrt{\nu}\left(A_\nu I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)+B_\nu I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\right) \end{cases}$$

$$Choix\ \beta^2=0 \Rightarrow \begin{cases} R''(\mu)+\alpha^2\mu^2R(\mu)=0 \Rightarrow R(\mu)=\sqrt{\mu}\left(A_\mu J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)+B_\mu J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)\right) \\ \Theta''(\nu)+\alpha^2\nu^2\Theta(\nu)=0 \Rightarrow \Theta(\nu)=\sqrt{\nu}\left(A_\nu J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)+B_\nu J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Pour montrer que les solutions précédentes dérivent bien d'une équation de propagation des ondes de Bessel, prenons les deux équations suivantes transformées des équations originales de Bessel et de propagation de Bessel qui ont pour solution :

$$(1)\quad Z''(z)-\frac{2\alpha-1}{z}Z'(z)+\left(\beta^2\gamma^2z^{2\gamma-2}+\frac{\alpha^2-n^2\gamma^2}{z^2}\right)Z(z)=0\Rightarrow\begin{cases}Z(z)=z^{\alpha}\left(A_zJ_n\left(\beta z^{\gamma}\right)+A_zY_n\left(\beta z^{\gamma}\right)\right) & si\ n\in\mathbf{N}\\ Z(z)=z^{\alpha}\left(A_zJ_n\left(\beta z^{\gamma}\right)+A_zJ_{-n}\left(\beta z^{\gamma}\right)\right) & si\ n\notin\mathbf{N}\end{cases}$$

$$(2)\ Equation\ d'onde\ de\ Bessel\quad Z''(z)+\frac{1}{z}Z'(z)+\left(\alpha^2z^2+\beta^2-\frac{p^2}{z^2}\right)Z(z)=0\Rightarrow A_zJ_p(\alpha,\beta,z)+B_zJ_{-p}(\alpha,\beta,z)$$

$$En\ posant\ Z(z)=\frac{V(z)}{\sqrt{z}}\Rightarrow Z'(z)=\frac{V'(z)}{\sqrt{z}}-\frac{V(z)}{2z\sqrt{z}}\Rightarrow Z''(z)=\frac{V''(z)}{\sqrt{z}}-\frac{V'(z)}{z\sqrt{z}}+\frac{3V(z)}{4z^{-5/2}}$$

$$(2)\Rightarrow\frac{V''(z)}{\sqrt{z}}-\frac{V'(z)}{z\sqrt{z}}+\frac{3V(z)}{4z^{-5/2}}+\frac{1}{z}\left(\frac{V'(z)}{\sqrt{z}}-\frac{V(z)}{2z\sqrt{z}}\right)+\left(\alpha^2z^2+\beta^2-\frac{p^2}{z^2}\right)\frac{V(z)}{\sqrt{z}}=0$$

$$\frac{V''(z)}{\sqrt{z}}+\frac{V(z)}{4z^2\sqrt{z}}+\left(\alpha^2z^2+\beta^2-\frac{p^2}{z^2}\right)\frac{V(z)}{\sqrt{z}}=0\Rightarrow V''(z)+\left(\alpha^2z^2+\beta^2-\frac{\left(p^2-\frac{1}{4}\right)}{z^2}\right)V(z)=0$$

$$Choix\ \beta^2=0\Rightarrow\begin{cases}En\ posant\ \alpha=\frac{1}{2}\ ;\ \gamma=2\ ;\ \beta^2\gamma^2=\lambda^2a^2\ ;\ n^2=\frac{1}{16}\quad dans\quad (1)\Rightarrow n=\frac{1}{4}\ ;\ \beta=\frac{\lambda a}{2}\\ (1)\Rightarrow Z''(z)+\lambda^2a^2z^2Z(z)=0\\ R''(\mu)+\lambda^2a^2\mu^2R(\mu)=0\Rightarrow R(\mu)=\sqrt{\mu}\left(A_{\mu}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\mu^2}{2}\right)+B_{\mu}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\mu^2}{2}\right)\right)\\ \Theta''(\nu)+\lambda^2a^2\nu^2\Theta(\nu)=0\Rightarrow\Theta(\nu)=\sqrt{\nu}\left(A_{\nu}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\nu^2}{2}\right)+B_{\nu}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\nu^2}{2}\right)\right)\end{cases}$$

$$Choix+\beta^2\Rightarrow\begin{cases}En\ posant\ p=\frac{1}{2}\ dans\ (2)\Rightarrow V''(z)+\left(\alpha^2z^2+\beta^2\right)V(z)=0\\ Il\ vient\ \Theta''(\nu)+\left(\beta^2+\alpha^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0\Rightarrow\Theta(\nu)=\sqrt{\nu}\left(A_{\nu}J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)+B_{\nu}J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\right)\\ R''(\mu)-\left(\beta^2-\alpha^2\mu^2\right)R(\mu)=0\Rightarrow R(\mu)=\sqrt{\mu}\left(A_{\mu}I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)+B_{\mu}I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\right)\end{cases}$$

$$Choix-\beta^2\Rightarrow\begin{cases}R''(\mu)+\left(\beta^2+\alpha^2\mu^2\right)R(\mu)=0\Rightarrow R(\mu)=\sqrt{\mu}\left(A_{\mu}J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)+B_{\mu}J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\right)\\ \Theta''(\nu)-\left(\beta^2-\alpha^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0\Rightarrow\Theta(\nu)=\sqrt{\nu}\left(A_{\nu}I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)+B_{\nu}I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\right)\end{cases}$$

Exemple : *cylindre de longueur infinie de section parabolique ou disque de section parabolique, symétrique, soumis à des conditions initiales de température fixe 0, et de conditions aux limites de Dirichlet inhomogènes de température T_0, problème de réchauffement ou de refroidissement.*

$$\frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,t)}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,t)}{\partial\nu^2}\right)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\mu,\nu,t)}{\partial t}=0 \quad (\mu,\nu)\in[-s_0,s_0]\times[0,s_0]$$

$$\begin{cases} C.L. \quad T(\mu,\nu,t)\big|_{\substack{\mu=\pm s_0\\ \nu=s_0}}=0 \\ C.I \quad T(\mu,\nu,0)=T_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C.L. \quad T(\mu,\nu,t)\big|_{\substack{\mu=\pm s_0\\ \nu=s_0}}=T_0 \\ C.I \quad T(\mu,\nu,0)=0 \end{cases}$$

Les solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} R(\mu)\Theta(\nu)=\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}\left\{A\,I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)+B\,I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\right\}\left\{C\,J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)+D\,J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\right\} \\ ou \quad R(\mu)\Theta(\nu)=\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}\left\{A\,J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)+B\,J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\right\}\left\{C\,I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)+D\,I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\right\} \\ ou \quad R(\mu)\Theta(\nu)=\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}\left\{A\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)+B\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)\right\}\left\{C\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)+D\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)\right\} \end{cases}$$

La condition de régularité de la solution à 0, s'exprime par les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\ \sqrt{x}J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)=\lim_{x\to 0}\ \sqrt{x}I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)=0$$

$$\lim_{x\to 0}\ \sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)=\lim_{x\to 0}\ \sqrt{x}I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)=\lim_{x\to 0}\ \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta\,x}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{\frac{2}{\pi\,\beta}}$$

$$\lim_{x\to 0}\ \sqrt{x}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,x^2}{2}\right)=0 \qquad \lim_{x\to 0}\ \sqrt{x}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,x^2}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{\alpha^{\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

La condition de régularité du gradient doit s'appliquer également à la solution recherchée. Elle est donc plus forte que la condition de régularité de la solution en 0. Elle s'exprime communément sous la forme :

$$\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,t)}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,t)}{\partial\nu}\right)^2\propto\mu^2+\nu^2$$

$$T(\mu,\nu,t)=U(\mu)V(\nu)H(t)\Rightarrow\left(\frac{dU(\mu)}{d\mu}\right)^2(V(\nu))^2+(U(\mu))^2\left(\frac{dV(\nu)}{d\nu}\right)^2\propto\mu^2+\nu^2$$

Pour cela constatons les développements limités suivant autour de 0 :

$$\sqrt{x}J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)\approx\frac{\sqrt{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x+O\left(x^3\right)\qquad \sqrt{x}I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)\approx\frac{\sqrt{\frac{\beta}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}x+O\left(x^3\right)$$

$$\sqrt{x}J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)\approx\frac{\sqrt{\frac{2}{\beta}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(1-\frac{\beta^2x^2}{2}\right)+O\left(x^4\right)\qquad \sqrt{x}I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)\approx\frac{\sqrt{\frac{2}{\beta}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\left(1+\frac{\beta^2x^2}{2}\right)+O\left(x^4\right)$$

$$R(\mu,\nu)=(U'(\mu))^2(V(\nu))^2+(U(\mu))^2(V'(\nu))^2$$

$$\begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{\beta}{2}\frac{\left(\mu^2+\nu^2\right)}{\Gamma^4\left(\frac{3}{2}\right)}\qquad \begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{\beta}{2}\frac{\left(\mu^2+\nu^2\right)}{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\ ou\ \begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}\neq 0$$

$$\begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\ ou\ \begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}\neq 0$$

$$\begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\ ou\ \begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=2\beta^3\frac{\mu^2\left(1+\frac{\beta^4\nu^4}{4}\right)+\nu^2\left(1+\frac{\beta^4\mu^4}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}=\beta^3\left(\mu^2+\nu^2\right)\frac{4+\beta^4\mu^2\nu^2}{2\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\mu^2}{2}\right)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\nu^2}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{\alpha\left(\mu^2+\nu^2\right)}{4\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)}\qquad \begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\mu^2}{2}\right)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\nu^2}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{4\alpha^3\left(\mu^2+\nu^2\right)\left(\mu^4+\nu^4-\mu^2\nu^2\right)}{9\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$\begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\mu^2}{2}\right)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\nu^2}{2}\right)\end{cases}\ ou\ \begin{cases}U(\mu)=\sqrt{\mu}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\mu^2}{2}\right)\\ V(\nu)=\sqrt{\nu}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\nu^2}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{1}{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma^2\left(\frac{5}{4}\right)}\neq 0$$

L'observation de la condition de régularité du gradient conditionne donc la forme de la solution séparée, et également par la condition d'annulation au bord du domaine, le système d'équations transcendantales suivantes :

$$\begin{cases} R(\mu)\Theta(\nu)=\sqrt{|\mu|}\sqrt{|\nu|}I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) \\ ou \quad R(\mu)\Theta(\nu)=\sqrt{|\mu|}\sqrt{|\nu|}J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) \\ ou \quad R(\mu)\Theta(\nu)=\sqrt{|\mu|}\sqrt{|\nu|}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=0 \\ J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,{s_0}^2}{2}\right)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R(\mu)\Theta(\nu)=\sqrt{|\mu|}\sqrt{|\nu|}I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) \\ ou \quad R(\mu)\Theta(\nu)=\sqrt{|\mu|}\sqrt{|\nu|}J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) \\ ou \quad R(\mu)\Theta(\nu)=\sqrt{|\mu|}\sqrt{|\nu|}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=0 \\ J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,{s_0}^2}{2}\right)=0 \end{cases}$$

<u>*Approximation asymptotique des équations transcendantales*</u>

On peut utiliser les développements asymptotiques suivants des fonctions d'onde de Bessel J et I en fonctions de Bessel :

$$\begin{cases} z(x)=\frac{\alpha^2x^2}{\beta^2} \qquad \zeta(x)=\frac{\sqrt{z(x)}\sqrt{1+z(x)}+Log\left(\sqrt{z(x)}+\sqrt{1+z(x)}\right)}{2} \qquad \zeta'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{z(x)}} \\ J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)\approx\left(\frac{\zeta^2(x)}{z(x)(1+z(x))}\right)^{\frac{1}{4}}J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(x)\right) \qquad J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)\approx\left(\frac{\zeta^2(x)}{z(x)(1+z(x))}\right)^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(x)\right) \\ J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)\approx\left(\frac{\zeta(x)}{z(x)\zeta'(x)}\right)^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(x)\right) \qquad J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)\approx\left(\frac{\zeta(x)}{z(x)\zeta'(x)}\right)^{\frac{1}{2}}J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(x)\right) \end{cases}$$

dont un des développements de la fonctions d'onde de Bessel modifiée I est uniquement valable pour α x < β :

$$\begin{cases} z(x)\in[0,1] \qquad z(x)=\frac{\alpha^2x^2}{\beta^2} \qquad \zeta(x)=\frac{\sqrt{z(x)-z^2(x)}+ArcSin\left(\sqrt{z(x)}\right)}{2} \qquad \zeta'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{z(x)}-1} \\ I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,x)\approx\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\zeta(x)}{z(x)\zeta'(x)}}I_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(x)\right) \end{cases}$$

On peut également utiliser les développements asymptotiques suivants des fonctions d'onde de Bessel J en fonctions d'Airy:

$$z(x)=\frac{\alpha^2x^2}{\beta^2}\qquad\begin{cases} z(x)\in[0,1]\quad \Phi(x)=\left(\frac{3}{4}\left(ArcCos\left(\sqrt{z(x)}\right)-\sqrt{z(x)-z^2(x)}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ z(x)>1\quad \Phi(x)=\left(\frac{3}{4}\left(\sqrt{z^2(x)-z(x)}-ArcCosh\left(\sqrt{z(x)}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{4}\left(\sqrt{z^2(x)-z(x)}-Log\left(\sqrt{z(x)}+\sqrt{z(x)-1}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}}\end{cases}$$

$$I_p(\alpha,\beta,x)\approx 2^{\frac{5}{6}}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{1}{6}}\frac{e^{\pi\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{x\sqrt{\alpha}}\begin{cases}\left(\frac{z(x)\Phi(x)}{1-z(x)}\right)^{\frac{1}{4}}Ai\left(\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(x)\right)\quad z(x)=\frac{\alpha^2x^2}{\beta^2}\in[0,1] \\ \left(\frac{z(x)\Phi(x)}{z(x)-1}\right)^{\frac{1}{4}}Ai\left(-\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(x)\right)\quad z(x)=\frac{\alpha^2x^2}{\beta^2}>1\end{cases}$$

Cela permet de grandement simplifier le système d'équation transcendantale dont on peut numériquement constater que toutes les racines se situe dans le quart de plan α x>β, α>0 et β>0. Dans ce cas on a très simplement et compte tenu que les fonctions de Bessel d'ordre 1/2 sont des sinusoïdes :

$$\begin{cases} I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=0 \\ J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\, s_0^{\,2}}{2}\right)=0\end{cases}\approx\begin{cases} J_{\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(s_0)\right)=Ai\left(-\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0)\right)=0\Leftrightarrow Sin\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(s_0)\right)=Ai\left(-\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0)\right)=0 \\ J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\, s_0^{\,2}}{2}\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=0 \\ J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\, s_0^{\,2}}{2}\right)=0\end{cases}\approx\begin{cases} J_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(s_0)\right)=Ai\left(-\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0)\right)=0\Leftrightarrow Cos\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(s_0)\right)=Ai\left(-\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0)\right)=0 \\ J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\, s_0^{\,2}}{2}\right)=0\end{cases}$$

On peut développer un peu plus les équations transcendantales en introduisant les indices dans les solutions :

$$Posons \quad \omega = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \eta = \frac{\beta^2}{\alpha} \Rightarrow \beta = \omega\eta \qquad \alpha = \omega^2\eta \qquad z(s_0) = \omega^2 {s_0}^2 > 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \zeta(s_0,\omega) = \dfrac{\omega\, s_0\sqrt{1+\omega^2 {s_0}^2} + Log\left(\omega\, s_0 + \sqrt{1+\omega^2 {s_0}^2}\right)}{2} \\ \Phi(s_0,\omega) = \left(\dfrac{3}{4}\left(\omega\, s_0\sqrt{\omega^2 {s_0}^2 - 1} - Log\left(\omega\, s_0 + \sqrt{\omega^2 {s_0}^2 - 1}\right)\right)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Sin\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\zeta(s_0)\right) = Ai\left(-\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0)\right) = 0 \Rightarrow \zeta(s_0,\omega) = \dfrac{n\pi}{\eta} \Leftrightarrow \omega_n = \zeta^{-1}\left(s_0, \dfrac{n\pi}{\eta}\right) \qquad \eta_{n,m} \quad tq \quad Ai\left(-\eta^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0,\omega_n)\right) = 0 \\ \beta = 0 \quad \alpha_n \quad tq \quad J_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{\alpha\, {s_0}^2}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

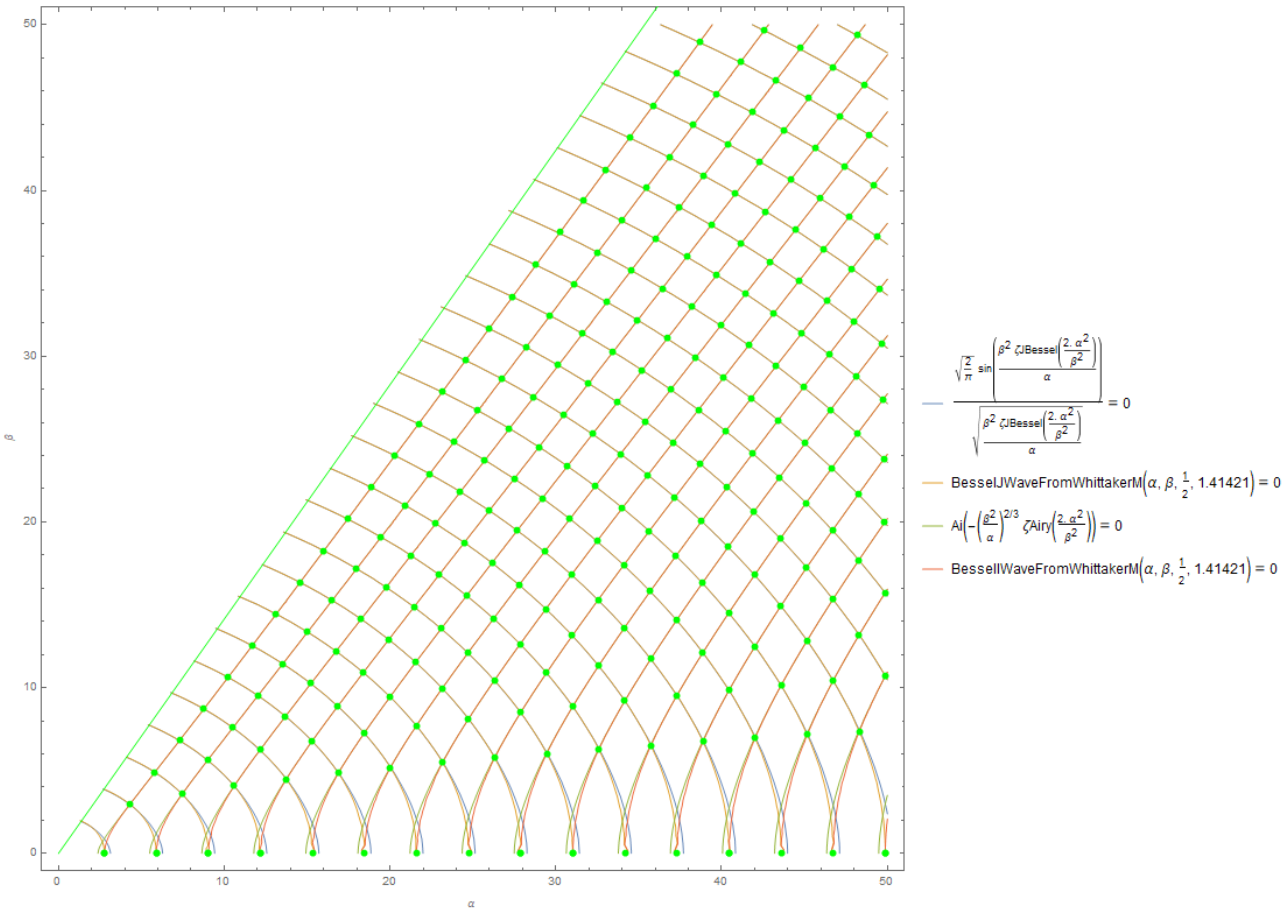
$$\begin{cases} Cos\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\sqrt{\zeta(s_0)}\right) = Ai\left(-\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0)\right) = 0 \Rightarrow \zeta(s_0,\omega) = \dfrac{(2n+1)\pi}{2\eta} \Leftrightarrow \omega_n = \zeta^{-1}\left(s_0, \dfrac{(2n+1)\pi}{2\eta}\right) \qquad \eta_{n,m} \quad tq \quad Ai\left(-\eta^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0,\omega_n)\right) = 0 \\ \beta = 0 \quad \alpha_n \quad tq \quad J_{-\frac{1}{4}}\left(\dfrac{\alpha\, {s_0}^2}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas les racines situées sur l'axe des abscisses β=0, correspondent bien aux solutions :

$$\beta = 0 \quad \alpha_n \quad tq \quad J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\, {s_0}^2}{2}\right) = 0 \qquad \alpha_n \quad tq \quad J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\, {s_0}^2}{2}\right) = 0$$

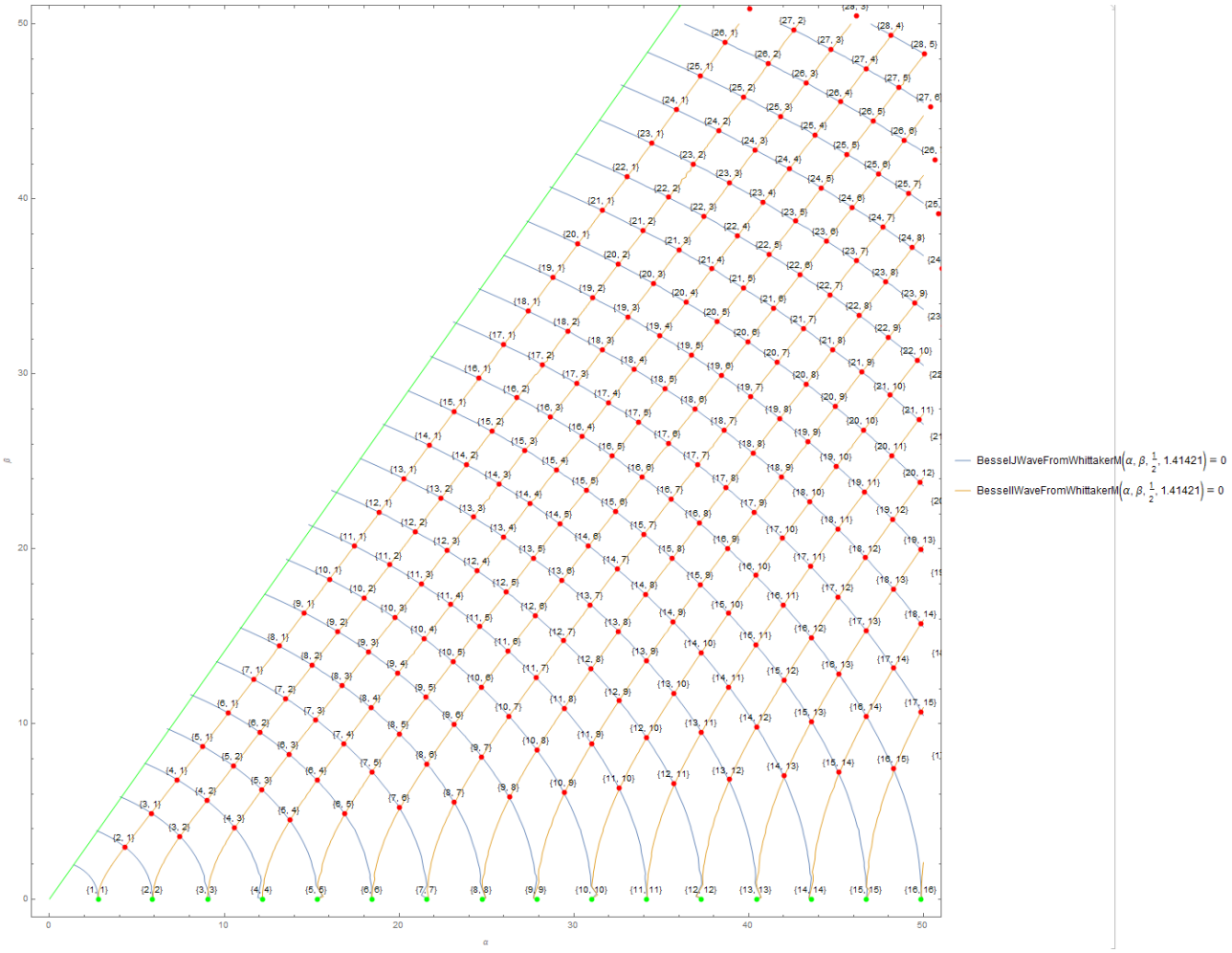
<u>Résolution numérique des équations transcendantales</u>

Voici le graphe des iso-valeurs nulles du système d'équations transcendantales pour p=1/2: les points d'intersections sont les racines recherchées. J'ai également matérialisé la droite isolant le quart de plan, le tracé les iso-valeurs nulles du système transcendantale asymptotique afin de montrer que la convergence est très bonne dès les premières racines et les points d'intersection sur l'abscisse qui sont calculés à l'aide des zéros de la fonction de Bessel d'ordre ¼ :

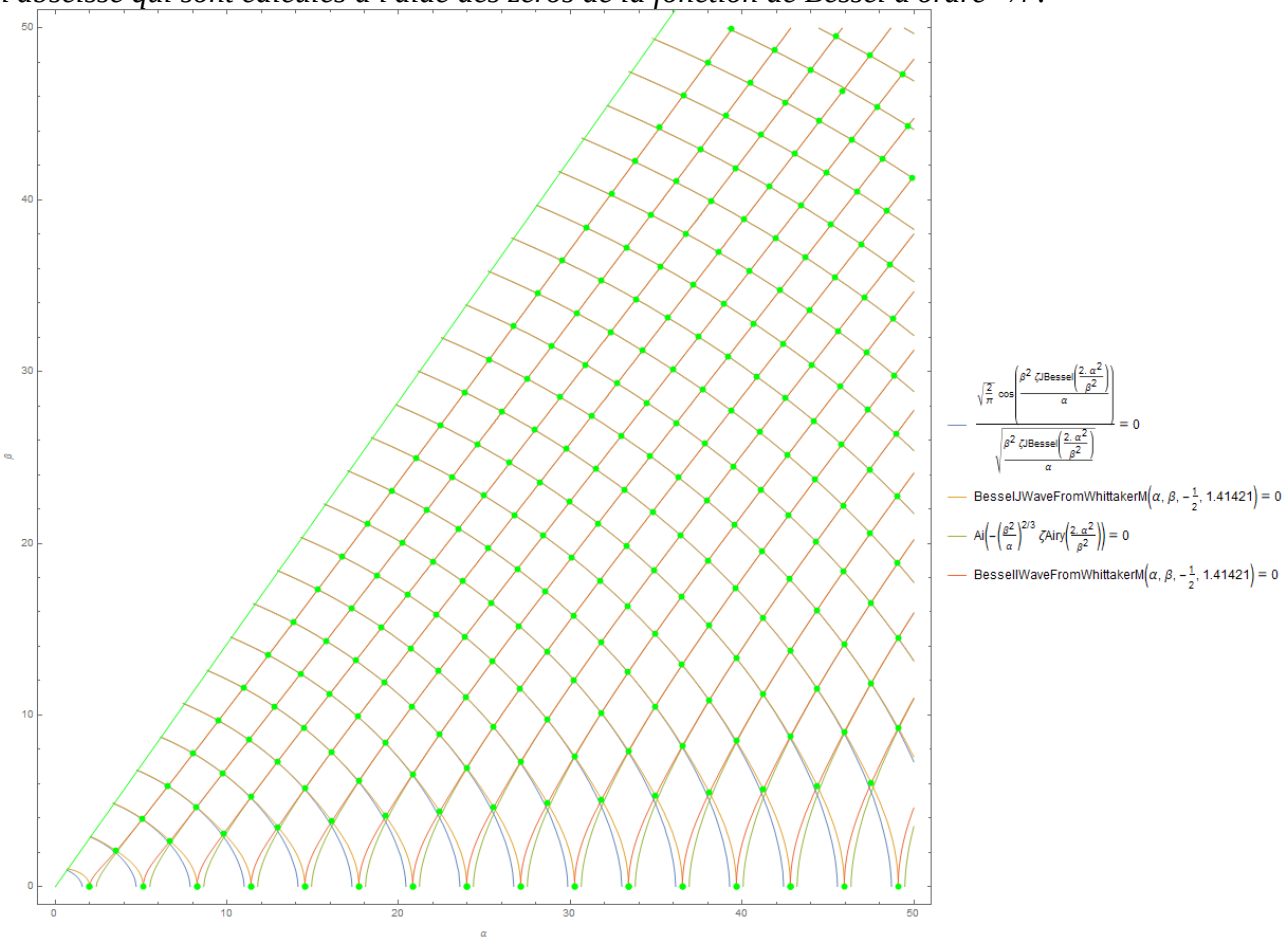


Les courbes concentriques $Sin\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(s_0)\right)=0 \Rightarrow \zeta(s_0,\omega)=\frac{n\pi}{\eta} \Leftrightarrow \omega_n=\zeta^{-1}\left(s_0,\frac{n\pi}{\eta}\right)$ *autour de l'origine repèrent l'indice n, les points d'intersections situés sur ces courbes sont en nombre limité sur le quart de plan, ce qui est logique car ils sont calculés à l'aide des zéros de la fonction d'Airy. La règle étant que pour la valeur de l'indice n, l'indice m varie de 1 à n-1. L'indice m=n correspond aux racines de la fonctions de Bessel d'ordre ¼ sur l'axe des abscisses.*

J'en profite pour illustrer l'indexation des racines, donc des valeurs propres du problème aux limites de Dirichlet, dans le graphe de contour suivant :

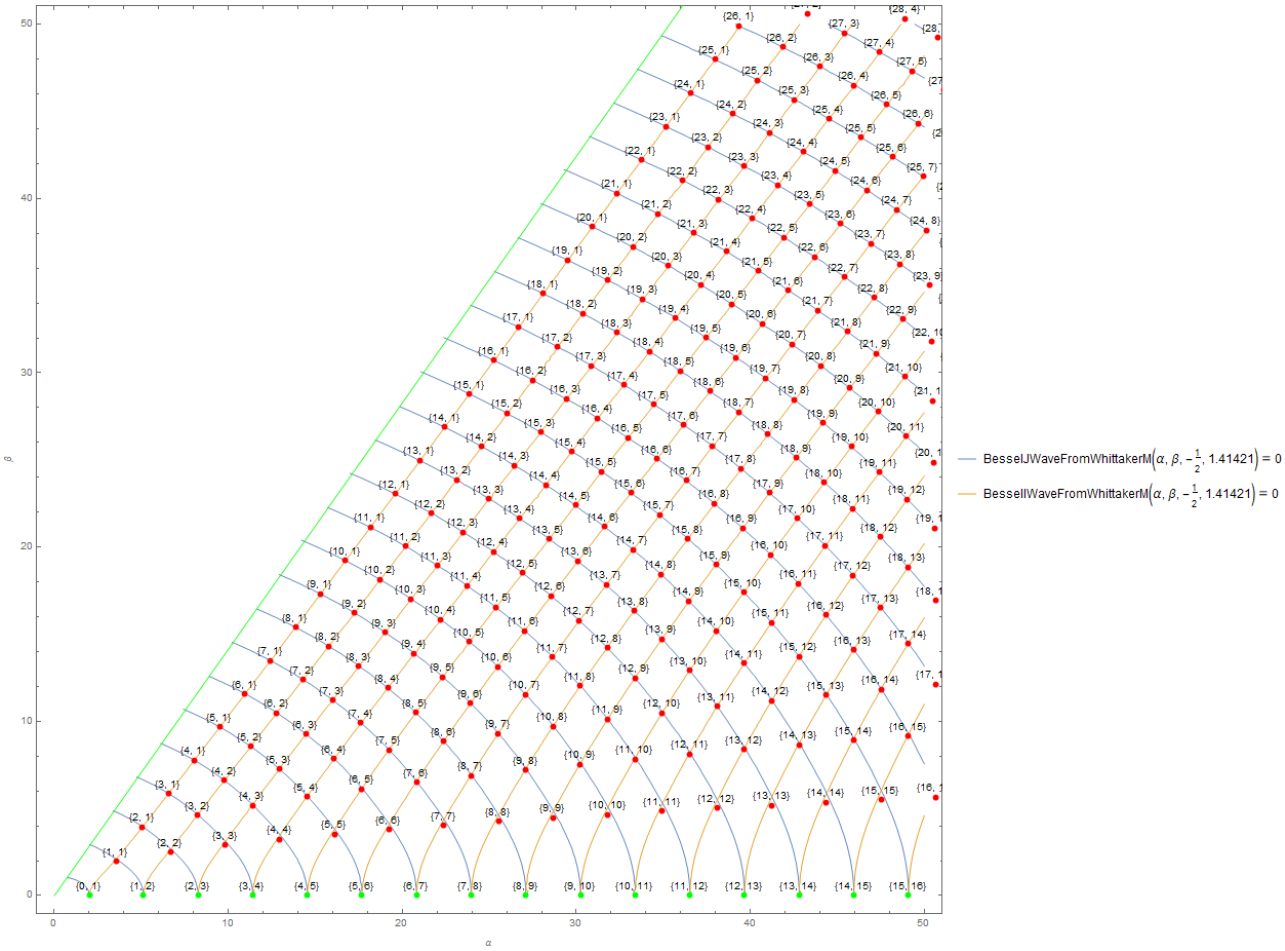


Voici le graphe des iso-valeurs nulles du système d'équations transcendantales pour p=-1/2: les points d'intersections sont les racines recherchées. J'ai également matérialisé la droite isolant le quart de plan, le tracé les iso-valeurs nulles du système transcendantale asymptotique afin de montrer que la convergence est très bonne dès les premières racines et les points d'intersection sur l'abscisse qui sont calculés à l'aide des zéros de la fonction de Bessel d'ordre -¼ :



Là encore, les courbes concentriques $Cos\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(s_0)\right)=0 \Rightarrow \zeta(s_0,\omega)=\frac{(2n+1)\pi}{2\eta} \Leftrightarrow \omega_n=\zeta^{-1}\left(s_0,\frac{(2n+1)\pi}{2\eta}\right)$ *autour de l'origine repèrent l'indice n, les points d'intersections situés sur ces courbes sont en nombre limité sur le quart de plan, ce qui est logique car ils sont calculés à l'aide des zéros de la fonction d'Airy. La règle étant que pour la valeur de l'indice n, l'indice m varie de 1 à n. L'indice m=n+1 correspond aux racines de la fonctions de Bessel d'ordre -¼ sur l'axe des abscisses.*

Voici l'indexation des racines, donc des valeurs propres du problème aux limites de Dirichlet, dans le graphe de contour suivant :



<u>*Orthogonalité bidimensionnelle des fonctions propres du problème aux limites*</u>

Soit deux fonctions propres du problème aux limites pour l'équation de Helmhotz de valeurs propres différentes, alors l'intégrale pondéré sur le domaine D est nulle, ce qui exprime une relation d'orthogonalité bi-dimensionnelle :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 U_1(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\dfrac{\partial^2 U_1(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\lambda_1{}^2 a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)U_1(\mu,\nu)=0 \\ \dfrac{\partial^2 U_2(\mu,\nu)}{\partial\mu^2}+\dfrac{\partial^2 U_2(\mu,\nu)}{\partial\nu^2}+\lambda_2{}^2 a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)U_2(\mu,\nu)=0 \end{cases} \Rightarrow \left(\lambda_1{}^2-\lambda_2{}^2\right)\iint_D d\mu d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)U_1(\mu,\nu)U_2(\mu,\nu)=0$$

La démonstration est classique généralisant en quelque sorte l'orthogonalité des solutions propres d'un problème de Strum-Liouville. Pour cela on peut utiliser par exemple le théorème de la divergence ou de Green-Ostrogradski pour transformer une intégrale de domaine en une intégrale au bord du domaine où la condition aux limites annule l'intégrande.

<u>*Solutions du problème de refroidissement ou de réchauffement*</u>

La solution du régime transitoire : $\begin{cases} C.L. \quad T_t(\mu,\nu,t)\big|_{\substack{\mu=\pm s_0 \\ \nu=s_0}} = 0 \\ C.I \quad T_t(\mu,\nu,0) = T_0 \end{cases}$ *se développe en quatre séries de fonctions propres deux à deux orthogonales, deux séries à double indexation et deux séries à simple indice. D'autre part il faut également tirer partie de la symétrie complète en μ et ν de la solution, de la symétrie du domaine et de la condition aux limites. On précise également que les fonctions :*

$$\sqrt{x}I_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},x\right) \quad et \quad \sqrt{x}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n x^2}{2}\right)$$

doivent être vues comme des fonctions impaires de x et donc continuer analytiquement en x <0 comme telles, et les fonctions :

$$\sqrt{x}I_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},x\right) \quad et \quad \sqrt{x}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n x^2}{2}\right)$$

Comme des fonctions paires de x, avec le même procédé de continuation analytique.

Sachant également que la relation d'orthogonalité doit être étendue aux couples de fonctions possédant exactement le même jeu de valeurs propres, à savoir que pour une même valeur propre, il y a annulation d'intégrales du type :

$$\begin{cases} \int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right) I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu) J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu) J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) = 0 \\ Posons \quad R_1(\mu) = I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu) \quad R_2(\mu) = J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu) \quad R_1(\nu) = J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) \quad R_2(\nu) = I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right) I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu) J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu) J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) = 0 \\ Posons \quad R_1(\mu) = I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu) \quad R_2(\mu) = J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu) \quad R_1(\nu) = J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) \quad R_2(\nu) = I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu) \end{cases}$$

$$\int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right) R_1(\mu)R_2(\mu)R_1(\nu)R_2(\nu) = \int_{-s_0}^{s_0} d\mu\mu^2 R_1(\mu)R_2(\mu)\int_0^{s_0} d\nu R_1(\nu)R_2(\nu) + \int_{-s_0}^{s_0} d\mu R_1(\mu)R_2(\mu)\int_0^{s_0} d\nu\nu^2 R_1(\nu)R_2(\nu)$$

$$= 4\int_0^{s_0} dx\, x^2 R_1(x)R_2(x)\int_0^{s_0} dx\, R_1(x)R_2(x)$$

Pour la simplification de l'intégrale, j'ai tiré partie de la parité du produit des fonctions : $R_1(x)R_2(x)$. *Il s'agit donc de prouver que l'une au moins de ces deux intégrales s'annule :*

$$\int_0^{s_0} dx\, x^2 R_1(x)R_2(x) = 0 \quad ou \quad \int_0^{s_0} dx\, R_1(x)R_2(x) = 0$$

Pour démontrer cela on revient aux équations séparées du problème aux limites et l'on reporte les deux équations différentielles des deux fonctions propres de même valeur propre :

$$\begin{cases} R_1''(x) = \left(\beta^2 - \alpha^2 x^2\right) R_1(x) \\ R_2''(x) = -\left(\beta^2 + \alpha^2 x^2\right) R_2(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Or \quad \int_0^{s_0} dx \left\{ R_2(x) R''_1(x) - R_2''(x) R_1(x) \right\} = \left[R_2(\mu) R_1'(\mu) - R_1(\mu) R_2'(\mu) \right]_0^{s_0} \Leftarrow \qquad R_1(s_0) = R_2(s_0) = 0 \\ = R_1(0) R_2'(0) - R_2(0) R_1'(0) = 0 \Leftarrow \begin{cases} R_{1,2}(x) = R_{1,2}(-x) \to R_{1,2}'(0) = 0 \\ ou \quad R_{1,2}(x) = -R_{1,2}(-x) \to R_{1,2}(0) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$Et \quad \begin{cases} \int_0^{s_0} dx \left\{ R_2(x) R''_1(x) - R_2''(x) R_1(x) \right\} = \int_0^{s_0} dx \left\{ R_2(x) \left(\beta^2 - \alpha^2 x^2\right) R_1(x) + \left(\beta^2 + \alpha^2 x^2\right) R_2(x) R_1(x) \right\} \\ = 2\beta^2 \int_0^{s_0} dx \; R_2(x) R_1(x) \end{cases} \Rightarrow \int_0^{s_0} dx \; R_2(x) R_1(x) = 0$$

Ce qui prouve l'orthogonalité. Alors dans ces conditions la solution peut s'écrire sous la forme :

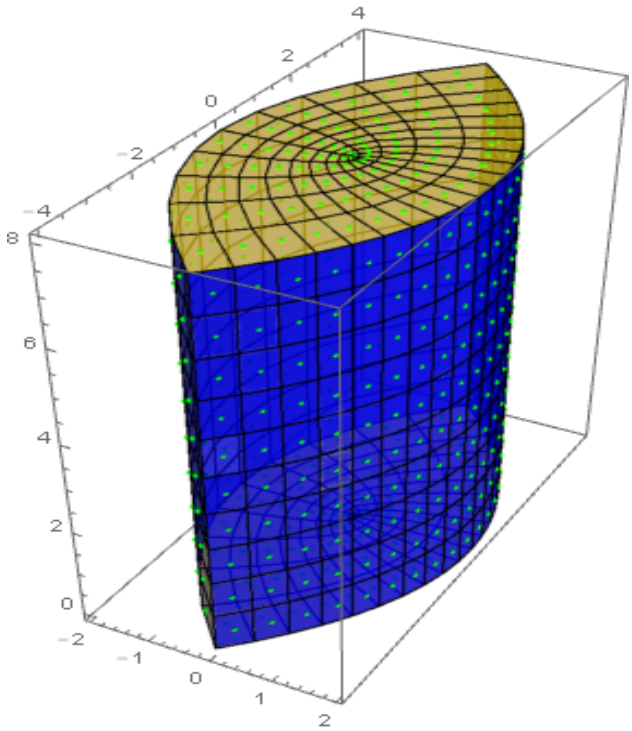
$$T_t(\mu,\nu,t) = T_0 \sqrt{\mu}\sqrt{\nu} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{(n,m)/I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=0} A_{(n,m)} \left\{ I_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right) J_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right) + J_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right) I_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right) \right\} e^{-\delta \frac{\alpha_{(n,m)}^2}{a^2} t} + \\ + \sum_{(n,m)/I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=0} B_{(n,m)} \left\{ I_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right) J_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right) + J_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right) I_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right) \right\} e^{-\delta \frac{\alpha_{(n,m)}^2}{a^2} t} + \\ + \sum_{n/J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha s_0^2}{2}\right)=0} C_n J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n \mu^2}{2}\right) J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n \nu^2}{2}\right) e^{-\delta \frac{\alpha_n^2}{a^2} t} + \sum_{n/J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha s_0^2}{2}\right)=0} D_n J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n \mu^2}{2}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n \nu^2}{2}\right) e^{-\delta \frac{\alpha_n^2}{a^2} t} \end{array} \right\}$$

où les 4 coefficients se calculent à partir de la condition initiale de température fixe au bord du domaine, à savoir :

$$A_{(n,m)} = \frac{\int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu \left(\mu^2 + \nu^2\right) \sqrt{|\mu|}\sqrt{\nu} I_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right) J_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)}{\int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu \left(\mu^2 + \nu^2\right) |\mu|\nu \, I_{\frac{1}{2}}^2\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right) J_{\frac{1}{2}}^2\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)} \qquad B_{(n,m)} = \frac{\int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu \left(\mu^2 + \nu^2\right) \sqrt{|\mu|}\sqrt{\nu} I_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right) J_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)}{\int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu \left(\mu^2 + \nu^2\right) |\mu|\nu \, I_{-\frac{1}{2}}^2\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right) J_{-\frac{1}{2}}^2\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)}$$

$$C_n = \frac{\int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu \left(\mu^2 + \nu^2\right) \sqrt{|\mu|}\sqrt{\nu} J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n \mu^2}{2}\right) J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n \nu^2}{2}\right)}{\int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu \left(\mu^2 + \nu^2\right) |\mu|\nu \, J_{\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha_n \mu^2}{2}\right) J_{\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha_n \nu^2}{2}\right)} \qquad D_n = \frac{\int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu \left(\mu^2 + \nu^2\right) \sqrt{|\mu|}\sqrt{\nu} J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n \mu^2}{2}\right) J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n \nu^2}{2}\right)}{\int_{-s_0}^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu \left(\mu^2 + \nu^2\right) |\mu|\nu \, J_{-\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha_n \mu^2}{2}\right) J_{-\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha_n \nu^2}{2}\right)}$$

Problème de diffusion en coordonnées paraboliques cylindriques à trois dimensions



Le système parabolique cylindrique est défini par le changement de variable

$$x = a\,\frac{\mu^2 - \nu^2}{2} \qquad y = a\,\mu\,\nu \quad z$$

où μ,ν sont les coordonnées paraboliques représentant un système de paraboles orthogonales entre elles et a un facteur d'échelle. Le Laplacien et l'équation de diffusion en coordonnées parabolique cylindrique 3D (μ,ν,z) s'écrivent sous la forme :

$$\frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,z,t)}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,z,t)}{\partial\nu^2}\right)+\frac{\partial^2 T(\mu,\nu,z,t)}{\partial z^2}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\mu,\nu,z,t)}{\partial t}=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega \text{ de frontière } \partial\Omega \quad \begin{cases} C.L. \quad \alpha\, T(\mu,\nu,z,t)+\beta\left.\dfrac{\partial T(\mu,\underline{\nu},z,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f_{\partial\Omega}(\mu,\nu) \\ C.I \quad T(\mu,\nu,z,0)=T_0(\mu,\nu,z) \end{cases}$$

Par séparation des variables sur le temps une solution possible de l'équation s'écrit :

$$T(\mu,\nu,z,t)=U(\mu,\nu,z)D(t) \Rightarrow \frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 U(\mu,\nu,z)}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 U(\mu,\nu,z)}{\partial\nu^2}\right)+\frac{\partial^2 U(\mu,\nu,z)}{\partial z^2}+\lambda^2\,U(\mu,\nu,z)=0$$

$$\lambda^2>0 \quad \frac{1}{\delta}\frac{D'(t)}{D(t)}=-\lambda^2 \Rightarrow D(t)=e^{-\delta\lambda^2 t} \Rightarrow T(\mu,\nu,z,t)=U(\mu,\nu,z)e^{-\delta\lambda^2 t}$$

La séparation des variables spatiales donnent :

$$\frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 U(\mu,\nu,z)}{\partial\mu^2}+\frac{\partial^2 U(\mu,\nu,z)}{\partial\nu^2}\right)+\frac{\partial^2 U(\mu,\nu,z)}{\partial z^2}+\lambda^2\,U(\mu,\nu,z)=0 \Leftarrow U(\mu,\nu,z)=R(\mu)\Theta(\nu)Z(z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{R''(\mu)}{R(\mu)}+\frac{\Theta''(\nu)}{\Theta(\nu)}\right)+\frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\lambda^2 \Rightarrow \frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\tau^2 \quad \frac{R''(\mu)}{R(\mu)}+\frac{\Theta''(\nu)}{\Theta(\nu)}=\left(\tau^2-\lambda^2\right)a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{R''(\mu)}{R(\mu)}+\left(\lambda^2-\tau^2\right)a^2\mu^2=\pm\beta^2=-\frac{\Theta''(\nu)}{\Theta(\nu)}-\left(\lambda^2-\tau^2\right)a^2\nu^2 \Rightarrow \begin{cases} R''(\mu)-\left(\pm\beta^2+\left(\tau^2-\lambda^2\right)a^2\mu^2\right)R(\mu)=0 \\ \Theta''(\nu)+\left(\pm\beta^2-\left(\tau^2-\lambda^2\right)a^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0 \\ Z''(z)+\tau^2 Z(z)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textit{En posant} \quad \left(\lambda^2-\tau^2\right)a^2=\alpha^2 \quad \begin{cases} R''(\mu)-\left(\pm\beta^2-\alpha^2\mu^2\right)R(\mu)=0 \\ \Theta''(\nu)+\left(\pm\beta^2+\alpha^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0 \end{cases}$$

Assimilables aux équations de propagation de Bessel

On retrouve les équations de propagation de Bessel d'ordre

$$Choix+\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} R''(\mu)-\left(\beta^2-\alpha^2\mu^2\right)R(\mu)=0 \Rightarrow R(\mu)=\sqrt{\mu}\left(A_\mu I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)+B_\mu I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\right) \\ \Theta''(\nu)+\left(\beta^2+\alpha^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0 \Rightarrow \Theta(\nu)=\sqrt{\nu}\left(A_\nu J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)+B_\nu J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\right) \end{cases}$$

$$Choix-\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} R''(\mu)+\left(\beta^2+\alpha^2\mu^2\right)R(\mu)=0 \Rightarrow R(\mu)=\sqrt{\mu}\left(A_\mu J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)+B_\mu J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\mu)\right) \\ \Theta''(\nu)-\left(\beta^2-\alpha^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0 \Rightarrow \Theta(\nu)=\sqrt{\nu}\left(A_\nu I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)+B_\nu I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,\nu)\right) \end{cases}$$

$$Choix\ \beta^2=0 \Rightarrow \begin{cases} R''(\mu)+\alpha^2\mu^2 R(\mu)=0 \Rightarrow R(\mu)=\sqrt{\mu}\left(A_\mu J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)+B_\mu J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)\right) \\ \Theta''(\nu)+\alpha^2\nu^2\Theta(\nu)=0 \Rightarrow \Theta(\nu)=\sqrt{\nu}\left(A_\nu J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)+B_\nu J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Si nous prenons la variable de séparation τ négative, en la fixant comme suit $\tau^2=-\lambda^2$, alors on retrouve le problème indépendant de la hauteur, parabolique polaire, soit :

$$\begin{cases} R''(\mu)-\left(\beta^2-\lambda^2a^2\mu^2\right)R(\mu)=0 \\ \Theta''(\nu)+\left(\beta^2+\lambda^2a^2\nu^2\right)\Theta(\nu)=0 \end{cases} \quad \textit{équations de propagation de Bessel}$$

Quelques considérations de physique élémentaire vont nous permettre de choisir les variables de séparation. Dans un problème de réchauffement ou de refroidissement la partie transitoire a toujours vocation à devenir nulle au profit de la partie stationnaire qui est solution de l'équation de Laplace. C'est la raison pour laquelle le développement en exponentielle décroissante implique que λ^2 est un paramètre toujours positif (d'où la notation au carré). Pour ce qui est de la composante axiale de la solution transitoire, dans un problème de Dirichlet/Neumann/Robin elle doit s'annuler ou sa dérivée première, ou une combinaison linéaire des deux. C'est donc une composante sinusoïdale.

Pour ce qui est du problème aux valeurs propres dans le plan polaire, il s'agit de construire exactement le même jeu de valeurs propres et de fonctions propres que dans le problème à deux dimensions. Aussi je ne rapporte pas les simulations numériques réalisés dans le problème cylindrique parabolique polaire (deux dimensions).

<u>Solutions du problème de refroidissement ou de réchauffement sur un cylindre parabolique cylindrique symétrique de hauteur h</u>

La solution du régime transitoire : $\begin{cases} C.L. \quad T_t(\mu,\nu,z,t)\big|_{\substack{\mu=\pm s_0 \\ \nu=s_0}}=0 \\ C.I \quad T_t(\mu,\nu,z,0)=T_0 \end{cases}$ *se développe en quatre séries de fonctions propres deux à deux orthogonales, deux séries à triple indexation et deux séries à double indice. D'autre part il faut également tirer partie de la symétrie complète en μ et ν de la solution, de la symétrie du domaine et de la condition aux limites. On précise également que les fonctions :* $\sqrt{x}I_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},x\right)$ *et* $\sqrt{x}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n x^2}{2}\right)$ *sont impaires en x et que les fonctions x et les fonctions :* $\sqrt{x}I_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},x\right)$ *et* $\sqrt{x}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n x^2}{2}\right)$ *sont paires de x.*

Avec les mêmes remarques d'orthogonalité deux à deux des fonctions propres polaires, la solution peut s'écrire sous la forme :

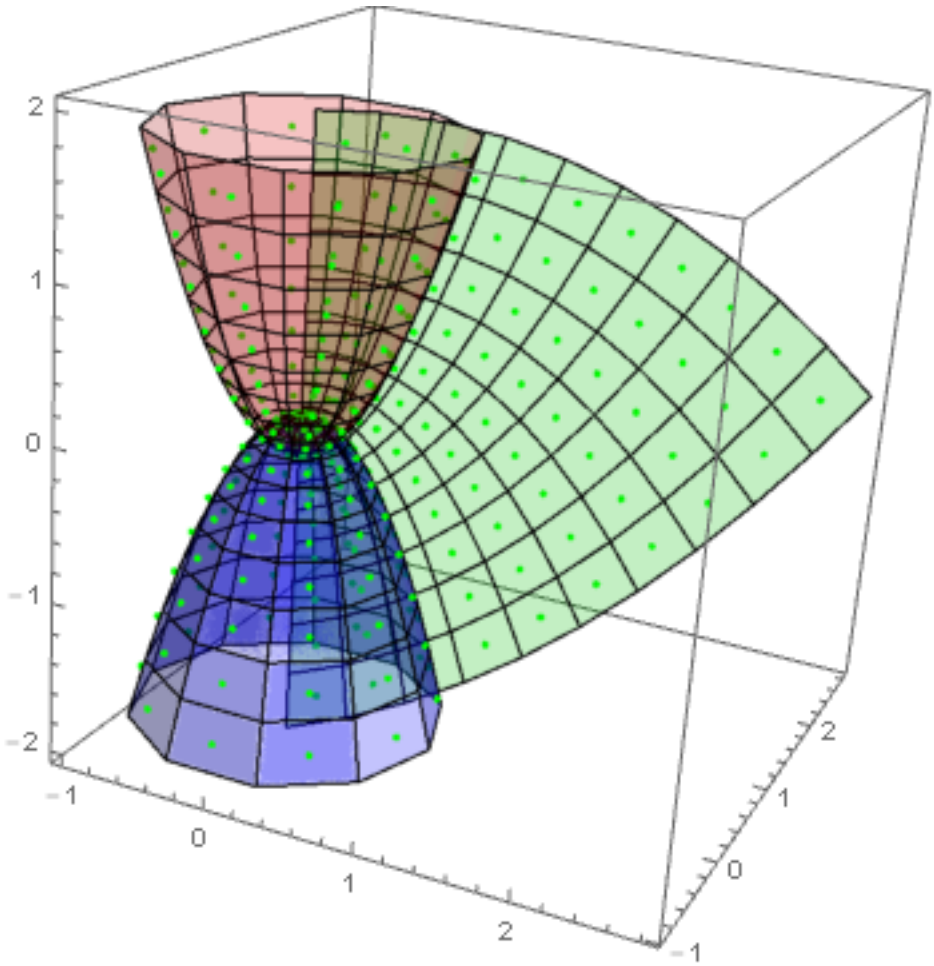
$$T_t(\mu,\nu,t)=T_0\frac{4}{\pi}\sqrt{\mu}\sqrt{\nu}\left\{\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{(n,m)/I_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=J_{\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=0}\left\{\begin{array}{l}A_{(n,m)}\left\{I_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right)J_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)+J_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right)I_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)\right\}\times\\ \displaystyle\sum_{l=1}^{l=+\infty}\frac{1}{l}Sin^2\left(\frac{l\pi}{2}\right)Sin\left(\frac{l\pi}{h}z\right)e^{-\delta\left\{\frac{\alpha_{(n,m)}^2}{a^2}+\frac{l^2\pi^2}{h^2}\right\}t}\end{array}\right\}+\\
+\displaystyle\sum_{(n,m)/I_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=J_{-\frac{1}{2}}(\alpha,\beta,s_0)=0}\left\{\begin{array}{l}B_{(n,m)}\left\{I_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right)J_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)+J_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right)I_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)\right\}\\ \times\displaystyle\sum_{l=1}^{l=+\infty}\frac{1}{l}Sin^2\left(\frac{l\pi}{2}\right)Sin\left(\frac{l\pi}{h}z\right)e^{-\delta\left\{\frac{\alpha_{(n,m)}^2}{a^2}+\frac{l^2\pi^2}{h^2}\right\}t}\end{array}\right\}+\\
+\displaystyle\sum_{n/J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha s_0^2}{2}\right)=0}C_nJ_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n\mu^2}{2}\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n\nu^2}{2}\right)\sum_{l=1}^{l=+\infty}\frac{1}{l}Sin^2\left(\frac{l\pi}{2}\right)Sin\left(\frac{l\pi}{h}z\right)e^{-\delta\left\{\frac{\alpha_n^2}{a^2}+\frac{l^2\pi^2}{h^2}\right\}t}+\\
+\displaystyle\sum_{n/J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha s_0^2}{2}\right)=0}D_nJ_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n\mu^2}{2}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n\nu^2}{2}\right)\sum_{l=1}^{l=+\infty}\frac{1}{l}Sin^2\left(\frac{l\pi}{2}\right)Sin\left(\frac{l\pi}{h}z\right)e^{-\delta\left\{\frac{\alpha_n^2}{a^2}+\frac{l^2\pi^2}{h^2}\right\}t}
\end{array}\right\}$$

où les 4 coefficients se calculent à partir de la condition initiale de température fixe au bord du domaine, à savoir :

$$A_{(n,m)}=\frac{\displaystyle\int_{-s_0}^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)\sqrt{|\mu|}\sqrt{\nu}I_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right)J_{\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)}{\displaystyle\int_{-s_0}^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)|\mu|\nu\,I_{\frac{1}{2}}^2\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right)J_{\frac{1}{2}}^2\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)}\qquad B_{(n,m)}=\frac{\displaystyle\int_{-s_0}^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)\sqrt{|\mu|}\sqrt{\nu}I_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right)J_{-\frac{1}{2}}\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)}{\displaystyle\int_{-s_0}^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)|\mu|\nu\,I_{-\frac{1}{2}}^2\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu\right)J_{-\frac{1}{2}}^2\left(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu\right)}$$

$$C_n=\frac{\displaystyle\int_{-s_0}^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)\sqrt{|\mu|}\sqrt{\nu}J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n\mu^2}{2}\right)J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n\nu^2}{2}\right)}{\displaystyle\int_{-s_0}^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)|\mu|\nu\,J_{\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha_n\mu^2}{2}\right)J_{\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha_n\nu^2}{2}\right)}\qquad D_n=\frac{\displaystyle\int_{-s_0}^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)\sqrt{|\mu|}\sqrt{\nu}J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n\mu^2}{2}\right)J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{\alpha_n\nu^2}{2}\right)}{\displaystyle\int_{-s_0}^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)|\mu|\nu\,J_{-\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha_n\mu^2}{2}\right)J_{-\frac{1}{4}}^2\left(\frac{\alpha_n\nu^2}{2}\right)}$$

Problème de diffusion en coordonnées paraboliques de révolution à trois dimensions



Le système parabolique de révolution est défini par le changement de variable

$$x = a\,\mu\,\nu\,Cos(\varphi) \quad x = a\,\mu\,\nu\,Sin(\varphi) \quad z = a\,\frac{\mu^2-\nu^2}{2}$$

où μ,ν sont les coordonnées paraboliques représentant un système de paraboles orthogonales entre elles et a un facteur d'échelle. Le Laplacien et l'équation de diffusion en coordonnées parabolique de révolution 3D (μ,ν,z) s'écrivent sous la forme :

$$\frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}T(\mu,\nu,\varphi,t)\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial}{\partial\nu}T(\mu,\nu,\varphi,t)\right)\right)+\frac{1}{a^2\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2T(\mu,\nu,\varphi,t)}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi,t)}{\partial t}=0$$

$$(\mu,\nu)\in\Omega \text{ de frontière } \partial\Omega \quad \begin{cases} C.L. \quad \alpha\,T(\mu,\nu,\varphi,t)+\beta\left.\dfrac{\partial T(\mu,\underline{\nu},\varphi,t)}{\partial n}\right|_{\partial\Omega}=f_{\partial\Omega}(\mu,\nu) \\ C.I \quad T(\mu,\nu,\varphi,0)=T_0(\mu,\nu,\varphi) \end{cases}$$

Par séparation des variables sur le temps, une solution possible de l'équation s'écrit :

$$T(\mu,\nu,\varphi,t)=U(\mu,\nu,\varphi)D(t)\Rightarrow\lambda^2>0\quad \frac{1}{\delta}\frac{D'(t)}{D(t)}=-\lambda^2\Rightarrow D(t)=e^{-\delta\lambda^2 t}\Rightarrow T(\mu,\nu,\varphi,t)=U(\mu,\nu,\varphi)e^{-\delta\lambda^2 t}$$

$$\frac{1}{a^2\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}U(\mu,\nu,\varphi)\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial}{\partial\nu}U(\mu,\nu,\varphi)\right)\right)+\frac{1}{a^2\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2U(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\lambda^2\,U(\mu,\nu,\varphi)=0$$

La séparation des variables spatiales donnent :

$$\frac{\mu^2\nu^2}{\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}U(\mu,\nu,\varphi)\right)+\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial}{\partial\nu}U(\mu,\nu,\varphi)\right)\right)+\lambda^2a^2\mu^2\nu^2U(\mu,\nu,\varphi)+\frac{\partial^2U(\mu,\nu,\varphi)}{\partial\varphi^2}=0$$

$$U(\mu,\nu,\varphi)=R(\mu)\Theta(\nu)\Phi(\varphi)$$

$$\Rightarrow\frac{\mu^2\nu^2}{\left(\mu^2+\nu^2\right)}\left(\frac{1}{\mu R(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}R(\mu)\Theta(\nu)\right)+\frac{1}{\nu\Theta(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial}{\partial\nu}R(\mu)\Theta(\nu)\right)\right)+\lambda^2a^2\mu^2\nu^2=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\alpha_3$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\mu R(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial R(\mu)}{\partial\mu}\right)+\lambda^2a^2\mu^2-\frac{\alpha_3}{\mu^2}=-\frac{1}{\nu\Theta(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial\Theta(\nu)}{\partial\nu}\right)-\lambda^2a^2\nu^2+\frac{\alpha_3}{\nu^2}=\alpha_2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}R(\mu)\Theta(\nu)\right)+\left(\lambda^2a^2\mu^2-\alpha_2-\frac{\alpha_3}{\mu^2}\right)R(\mu)=0\\ \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial\Theta(\nu)}{\partial\nu}\right)+\left(\lambda^2a^2\nu^2+\alpha_2-\frac{\alpha_3}{\nu^2}\right)\Theta(\nu)=0\\ \Phi''(\varphi)+\alpha_3\Phi(\varphi)=0\end{cases}\qquad \textit{équations de propagation de Bessel}$$

Si nous prenons la variable de séparation α_3 nulle, cela décrit un problème indépendant de l'angle azimutale, axi-symétrique, il vient également des équations de propagation de Bessel :

$$\begin{cases}\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}R(\mu)\Theta(\nu)\right)+\left(\lambda^2a^2\mu^2-\alpha_2\right)R(\mu)=0\\ \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\frac{\partial\Theta(\nu)}{\partial\nu}\right)+\left(\lambda^2a^2\nu^2+\alpha_2\right)\Theta(\nu)=0\end{cases}\qquad \textit{équations de propagation de Bessel}$$

Avec la normalisation suivante des paramètres, ce sont des équations de propagation de Bessel où l'indice p est nécessairement un multiple entier lorsque le paraboloïde est de révolution complète.

$$\lambda^2 a^2 = \alpha^2 \qquad \alpha_2 = \beta^2 \qquad ou \quad \alpha_2 = -\beta^2 \qquad \alpha_3 = p^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\dfrac{\partial}{\partial\mu}R(\mu)\right)+\left(\alpha^2\mu^2-\beta^2-\dfrac{p^2}{\mu^2}\right)R(\mu)=0 \\ \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\dfrac{\partial\Theta(\nu)}{\partial\nu}\right)+\left(\alpha^2\nu^2+\beta^2-\dfrac{p^2}{\nu^2}\right)\Theta(\nu)=0 \\ \Phi''(\varphi)+p^2\Phi(\varphi)=0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\dfrac{\partial}{\partial\mu}R(\mu)\right)+\left(\alpha^2\mu^2+\beta^2-\dfrac{p^2}{\mu^2}\right)R(\mu)=0 \\ \dfrac{1}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\dfrac{\partial\Theta(\nu)}{\partial\nu}\right)+\left(\alpha^2\nu^2-\beta^2-\dfrac{p^2}{\nu^2}\right)\Theta(\nu)=0 \\ \Phi''(\varphi)+p^2\Phi(\varphi)=0 \end{cases}$$

Les solutions communément admises sont alors de la forme :

$$Choix\ \beta^2=0 \Rightarrow \begin{cases} R(\mu)=A_\mu J_{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)+B_\mu J_{-\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\mu^2}{2}\right) \quad ou \quad R(\mu)=A_\mu J_{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)+B_\mu Y_{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\mu^2}{2}\right) \\ \Theta(\nu)=A_\nu J_{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)+B_\nu J_{-\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\nu^2}{2}\right) \quad ou \quad \Theta(\nu)=A_\mu J_{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)+B_\mu Y_{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\nu^2}{2}\right) \end{cases}$$

$$Choix+\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} \Theta(\nu)=A_\nu J_p(\alpha,\beta,\nu)+B_\nu \widetilde{Y}_p(\alpha,\beta,\nu) \\ R(\mu)=A_\mu I_p(\alpha,\beta,\mu)+B_\mu K_p(\alpha,\beta,\mu) \end{cases}$$

$$Choix-\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} R(\mu)=A_\mu J_p(\alpha,\beta,\mu)+B_\mu \widetilde{Y}_p(\alpha,\beta,\mu) \\ \Theta(\nu)=A_\nu I_p(\alpha,\beta,\nu)+B_\nu K_p(\alpha,\beta,\nu) \end{cases}$$

La condition de régularité du gradient doit s'appliquer également à la solution recherchée. Elle est donc plus forte que la condition de régularité de la solution en 0. Elle s'exprime communément sous la forme :

$$\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi,t)}{\partial \mu}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi,t)}{\partial \nu}\right)^2 \propto \mu^2+\nu^2 \qquad \left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi,t)}{\partial \varphi}\right)^2 \propto \mu^2\nu^2$$

$$T(\mu,\nu,t)=U(\mu)V(\nu)\Phi(\varphi)H(t) \Rightarrow \left(\frac{dU(\mu)}{d\mu}\right)^2 (V(\nu))^2+(U(\mu))^2\left(\frac{dV(\nu)}{d\nu}\right)^2 \propto \mu^2+\nu^2$$

Suivant les trois choix de solutions avec un paramètre p entier, il est clair que seules les fonctions de Bessel J d'ordre p/2, et les fonctions d'ondes de Bessel J et I sont les solutions admissibles, ne serait-ce qu'avec la deuxième condition de régularité du gradient $\left(\frac{\partial T(\mu,\nu,\varphi,t)}{\partial \varphi}\right)^2 \propto \mu^2\nu^2$ *cela impose que les limites des fonctions U et V soit nulles à l'origine des coordonnées, ce qui disqualifie de facto les fonctions d'onde de Bessel Y et K :*

$$Choix\ \beta^2=0 \Rightarrow R(\mu)=J_{\frac{p}{2}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right) \qquad \Theta(\nu)=J_{\frac{p}{2}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)$$

$$Choix+\beta^2 \Rightarrow R(\mu)=I_p(\alpha,\beta,\mu) \qquad \Theta(\nu)=J_p(\alpha,\beta,\nu)$$

$$Choix-\beta^2 \Rightarrow R(\mu)=J_p(\alpha,\beta,\mu) \qquad \Theta(\nu)=I_p(\alpha,\beta,\nu)$$

En prenant les développements limités suivant autour de l'origine :

$$J_p(\alpha,\beta,x)\approx\frac{1}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{\beta\,x}{2}\right)^p\left(1-\frac{1}{p+1}\left(\frac{\beta\,x}{2}\right)^2\right)$$

$$I_p(\alpha,\beta,x)\approx\frac{1}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{\beta\,x}{2}\right)^p\left(1+\frac{1}{p+1}\left(\frac{\beta\,x}{2}\right)^2\right)$$

$$J_{\frac{p}{2}}\left(\frac{\alpha\,x^2}{2}\right)\approx\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)}\left(\frac{\alpha\,x^2}{4}\right)^{\frac{p}{2}}\left(1-\frac{1}{\frac{p}{2}+1}\left(\frac{\alpha\,x^2}{4}\right)^2\right)$$

Cela permet d'établir la condition de régularité :

$$R(\mu,\nu)=(U'(\mu))^2(V(\nu))^2+(U(\mu))^2(V'(\nu))^2$$

$$\begin{cases}U(\mu)=J_p(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=I_p(\alpha,\beta,\nu)\end{cases} \begin{cases}U(\mu)=I_p(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=J_p(\alpha,\beta,\nu)\end{cases} \Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{p^2\beta^4}{2^{4p}}\frac{\left(\mu^2\nu^2\right)^{p-1}\left(\mu^2+\nu^2\right)}{\Gamma^4(1+p)}$$

$$\begin{cases}U(\mu)=J_{\frac{p}{2}}\left(\frac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)\\ V(\nu)=J_{\frac{p}{2}}\left(\frac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)\end{cases} \Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{p^2\alpha^{2p}}{2^{4p}}\frac{\left(\mu^2\nu^2\right)^{p-1}\left(\mu^2+\nu^2\right)}{\Gamma^4\left(1+\frac{p}{2}\right)}$$

Pour p=0, il vient les valeurs particulières :

$$R(\mu,\nu)=(U'(\mu))^2(V(\nu))^2+(U(\mu))^2(V'(\nu))^2$$

$$\begin{cases}U(\mu)=J_0(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=I_0(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\quad\begin{cases}U(\mu)=I_0(\alpha,\beta,\mu)\\ V(\nu)=J_0(\alpha,\beta,\nu)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{\beta^4}{4}\left(\mu^2+\nu^2\right)$$

$$\begin{cases}U(\mu)=J_0\left(\dfrac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)\\ V(\nu)=J_0\left(\dfrac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow R(\mu,\nu)=\frac{\alpha^4}{16}\left(\mu^6+\nu^6\right)=\frac{\alpha^4}{16}\left(\mu^2+\nu^2\right)\left(\mu^4+\nu^4-\mu^2\nu^2\right)$$

L'observation de la condition de régularité du gradient conditionne donc la forme de la solution séparée, et également par la condition d'annulation au bord du domaine, le système d'équations transcendantales suivantes :

$$\begin{cases}R(\mu)\Theta(\nu)=I_p(\alpha,\beta,\mu)J_p(\alpha,\beta,\nu)\\ ou\quad R(\mu)\Theta(\nu)=J_p(\alpha,\beta,\mu)I_p(\alpha,\beta,\nu)\\ ou\quad R(\mu)\Theta(\nu)=J_{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\mu^2}{2}\right)J_{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,\nu^2}{2}\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I_p(\alpha,\beta,s_0)=J_p(\alpha,\beta,s_0)=0\\ J_{\frac{p}{2}}\left(\dfrac{\alpha\,{s_0}^2}{2}\right)=0\end{cases}$$

<u>*Approximation asymptotique des équations transcendantales*</u>

On peut utiliser les développements asymptotiques suivants des fonctions d'onde de Bessel J et I en fonctions de Bessel :

$$\begin{cases}z(x)=\dfrac{\alpha^2x^2}{\beta^2}\qquad \zeta(x)=\dfrac{\sqrt{z(x)}\sqrt{1+z(x)}+Log\left(\sqrt{z(x)}+\sqrt{1+z(x)}\right)}{2}\qquad \zeta'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\dfrac{1}{z(x)}}\\ J_p(\alpha,\beta,x)\approx\left(\dfrac{\zeta^2(x)}{z(x)(1+z(x))}\right)^{\frac{1}{4}}J_p\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\zeta(x)\right)\qquad J_p(\alpha,\beta,x)\approx\left(\dfrac{\zeta(x)}{z(x)\zeta'(x)}\right)^{\frac{1}{2}}J_p\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\zeta(x)\right)\end{cases}$$

dont un des développements de la fonctions d'onde de Bessel modifiée I est uniquement valable pour α x < β :

$$\begin{cases}z(x)\in[0,1]\qquad z(x)=\dfrac{\alpha^2x^2}{\beta^2}\qquad \zeta(x)=\dfrac{\sqrt{z(x)-z^2(x)}+ArcSin\left(\sqrt{z(x)}\right)}{2}\qquad \zeta'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{z(x)}-1}\\ I_p(\alpha,\beta,x)\approx\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\dfrac{\zeta(x)}{z(x)\zeta'(x)}}I_p\left(\dfrac{\beta^2}{\alpha}\zeta(x)\right)\end{cases}$$

On peut également utiliser les développements asymptotiques suivants des fonctions d'onde de Bessel J en fonctions d'Airy:

$$z(x)=\frac{\alpha^2x^2}{\beta^2}\qquad\begin{cases} z(x)\in[0,1]\quad \Phi(x)=\left(\frac{3}{4}\left(ArcCos\left(\sqrt{z(x)}\right)-\sqrt{z(x)-z^2(x)}\right)\right)^{\frac{2}{3}} \\ z(x)>1\quad \Phi(x)=\left(\frac{3}{4}\left(\sqrt{z^2(x)-z(x)}-ArcCosh\left(\sqrt{z(x)}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{3}{4}\left(\sqrt{z^2(x)-z(x)}-Log\left(\sqrt{z(x)}+\sqrt{z(x)-1}\right)\right)\right)^{\frac{2}{3}}\end{cases}$$

$$I_p(\alpha,\beta,x)\approx 2^{\frac{5}{6}}\left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{\frac{1}{6}}\frac{e^{\pi\frac{\beta^2}{4\alpha}}}{x\sqrt{\alpha}}\begin{cases}\left(\frac{z(x)\Phi(x)}{1-z(x)}\right)^{\frac{1}{4}}Ai\left(\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(x)\right)\quad z(x)=\frac{\alpha^2x^2}{\beta^2}\in[0,1] \\ \left(\frac{z(x)\Phi(x)}{z(x)-1}\right)^{\frac{1}{4}}Ai\left(-\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(x)\right)\quad z(x)=\frac{\alpha^2x^2}{\beta^2}>1\end{cases}$$

Cela permet de grandement simplifier le système d'équation transcendantale dont on peut numériquement constater que toutes les racines se situe dans le quart de plan α x>β, α>0 et β>0. Dans ce cas on a très simplement et compte tenu que les fonctions de Bessel d'ordre 1/2 sont des sinusoïdes :

$$\begin{cases} I_p(\alpha,\beta,s_0)=J_p(\alpha,\beta,s_0)=0 \\ J_{\frac{p}{2}}\left(\frac{\alpha\, s_0^{\,2}}{2}\right)=0\end{cases}\approx\begin{cases} J_p\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\zeta(s_0)\right)=Ai\left(-\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0)\right)=0 \\ J_{\frac{p}{2}}\left(\frac{\alpha\, s_0^{\,2}}{2}\right)=0\end{cases}$$

On peut développer un peu plus les équations transcendantales en introduisant les indices dans les solutions :

$$Posons\quad \omega=\frac{\alpha}{\beta}\qquad \eta=\frac{\beta^2}{\alpha}\Rightarrow\beta=\omega\eta\qquad \alpha=\omega^2\eta\qquad z(s_0)=\omega^2 s_0^{\,2}>1$$

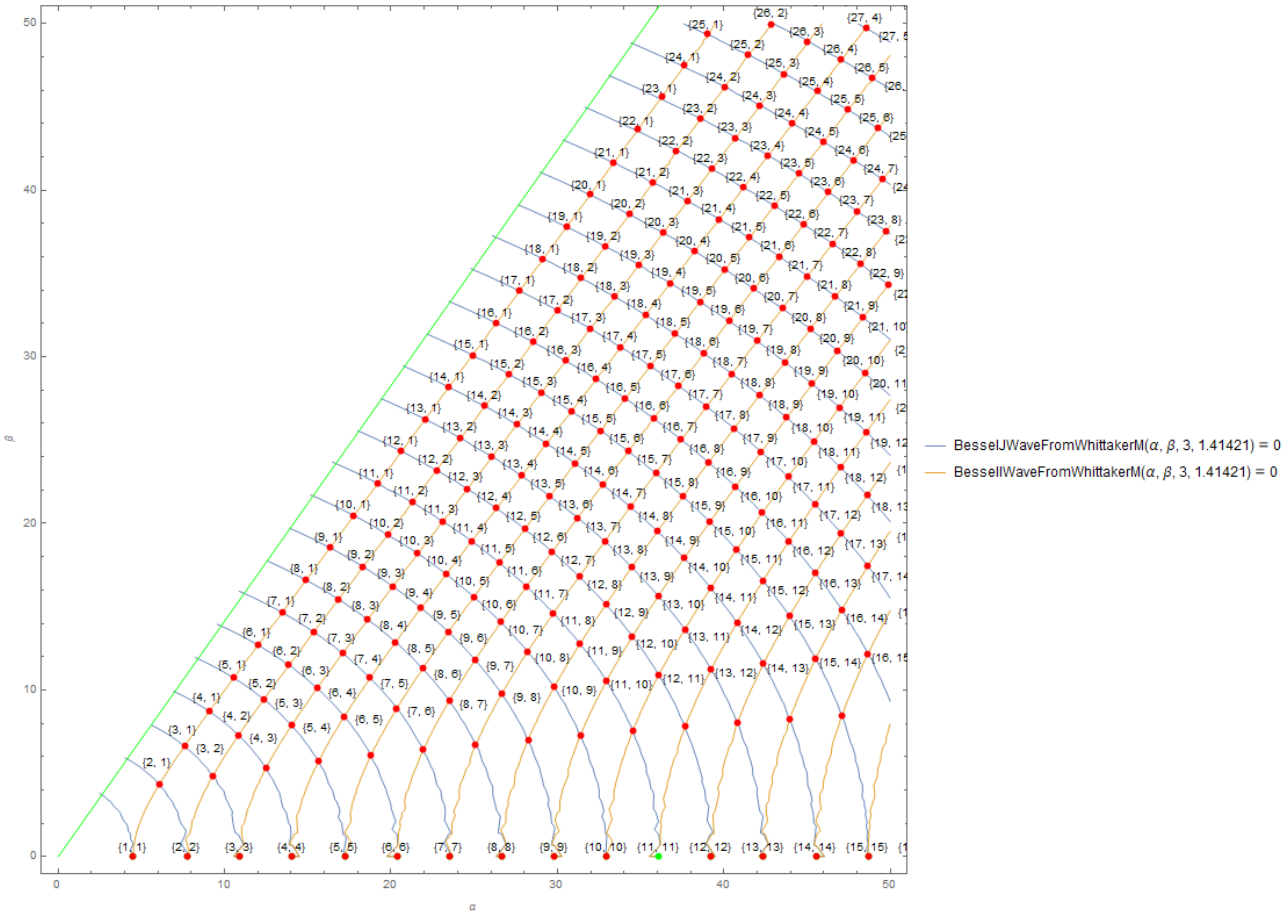
$$\Rightarrow\begin{cases}\zeta(s_0,\omega)=\frac{\omega\, s_0\sqrt{1+\omega^2 s_0^{\,2}}+Log\left(\omega\, s_0+\sqrt{1+\omega^2 s_0^{\,2}}\right)}{2} \\ \Phi(s_0,\omega)=\left(\frac{3}{4}\left(\omega\, s_0\sqrt{\omega^2 s_0^{\,2}-1}-Log\left(\omega\, s_0+\sqrt{\omega^2 s_0^{\,2}-1}\right)\right)\right)\end{cases}\qquad\begin{cases} J_p(\eta\,\zeta(s_0,\omega))=Ai\left(-\eta^{\frac{2}{3}}\Phi(s_0,\omega)\right)=0 \\ \beta=0\quad \alpha_n\quad tq\quad J_{\frac{p}{2}}\left(\frac{\alpha\, s_0^{\,2}}{2}\right)=0\end{cases}$$

Dans tous les cas les racines situées sur l'axe des abscisses β=0, correspondent bien aux solutions :

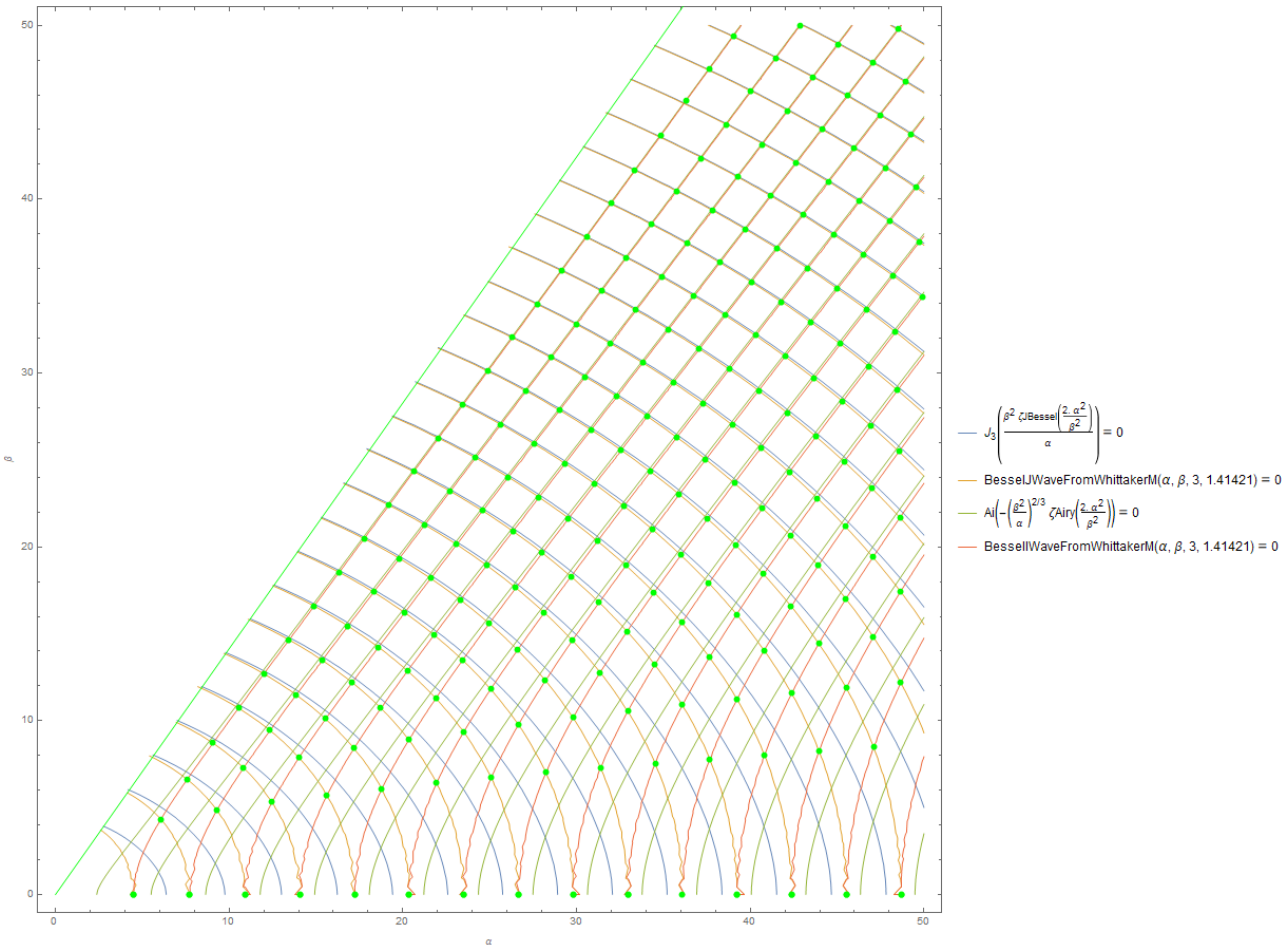
$$\beta=0\quad \alpha_n\quad tq\quad J_{\frac{p}{2}}\left(\frac{\alpha\, s_0^{\,2}}{2}\right)=0$$

<u>*Résolution numérique des équations transcendantales*</u>

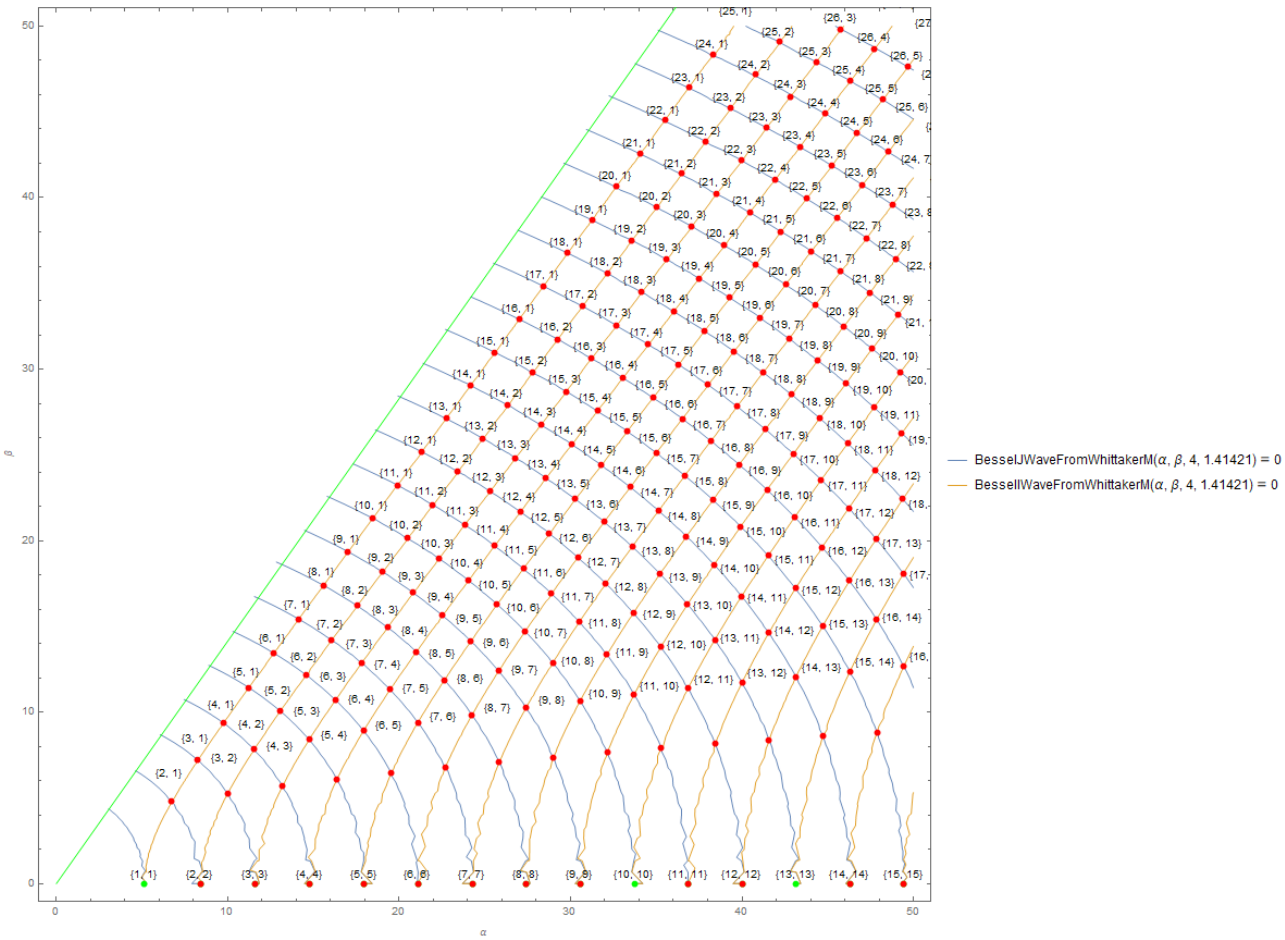
Voici le graphe des iso-valeurs nulles du système d'équations transcendantales pour p=3: les points d'intersections sont les racines recherchées. J'ai également matérialisé la droite isolant le quart de plan, l'indexation des racines, donc des valeurs propres du problème aux limites de Dirichlet et les points d'intersection sur l'abscisse qui sont calculés à l'aide des zéros de la fonction de Bessel d'ordre p/2,soit 3/2 :



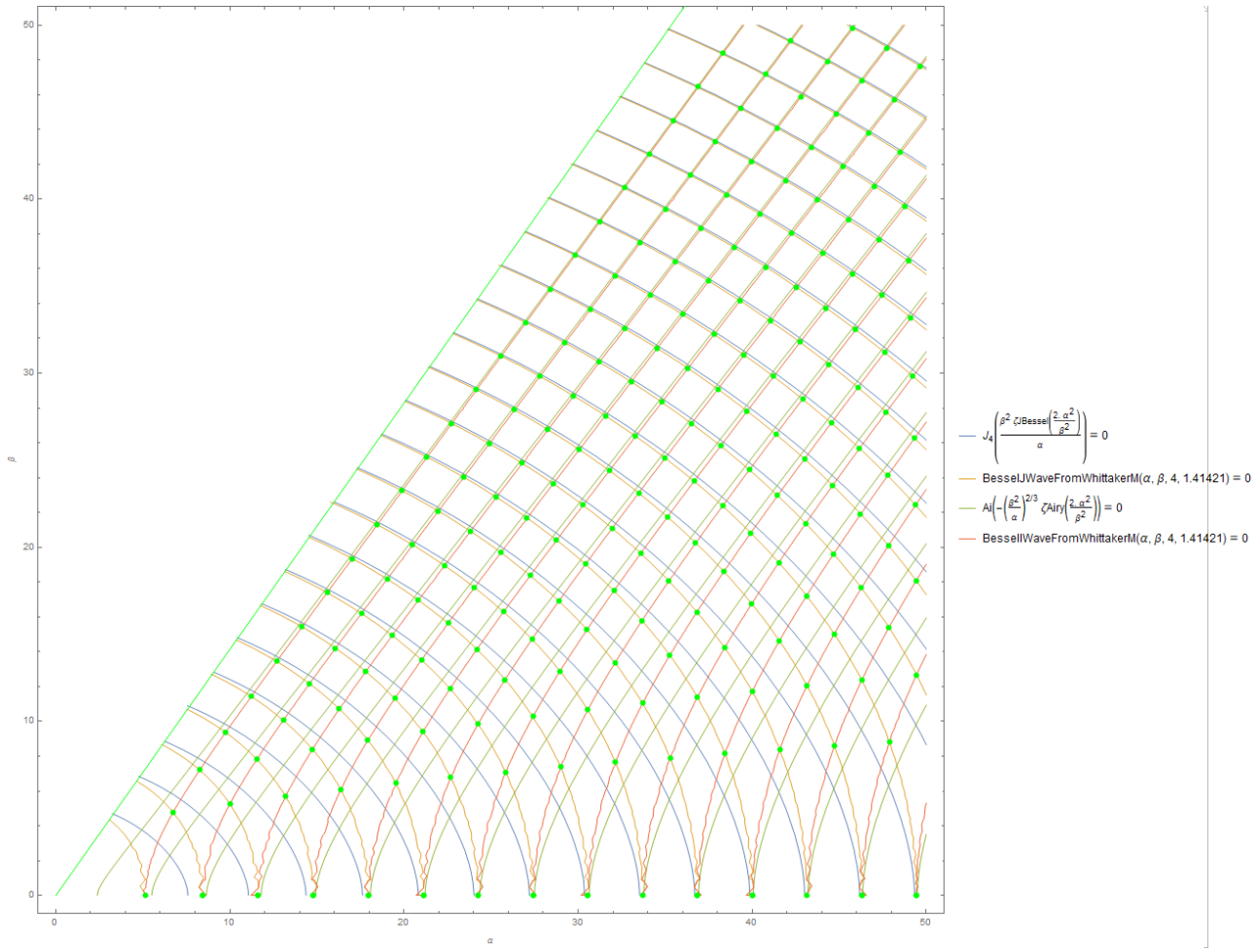
Ici le même graphe représente les iso-valeurs nulles du système d'équations transcendantales et le système asymptotique, afin d'illustrer la convergence vers les valeurs asymptotiques. On remarque toujours que plus l'ordre p est important moins la convergence est rapide :



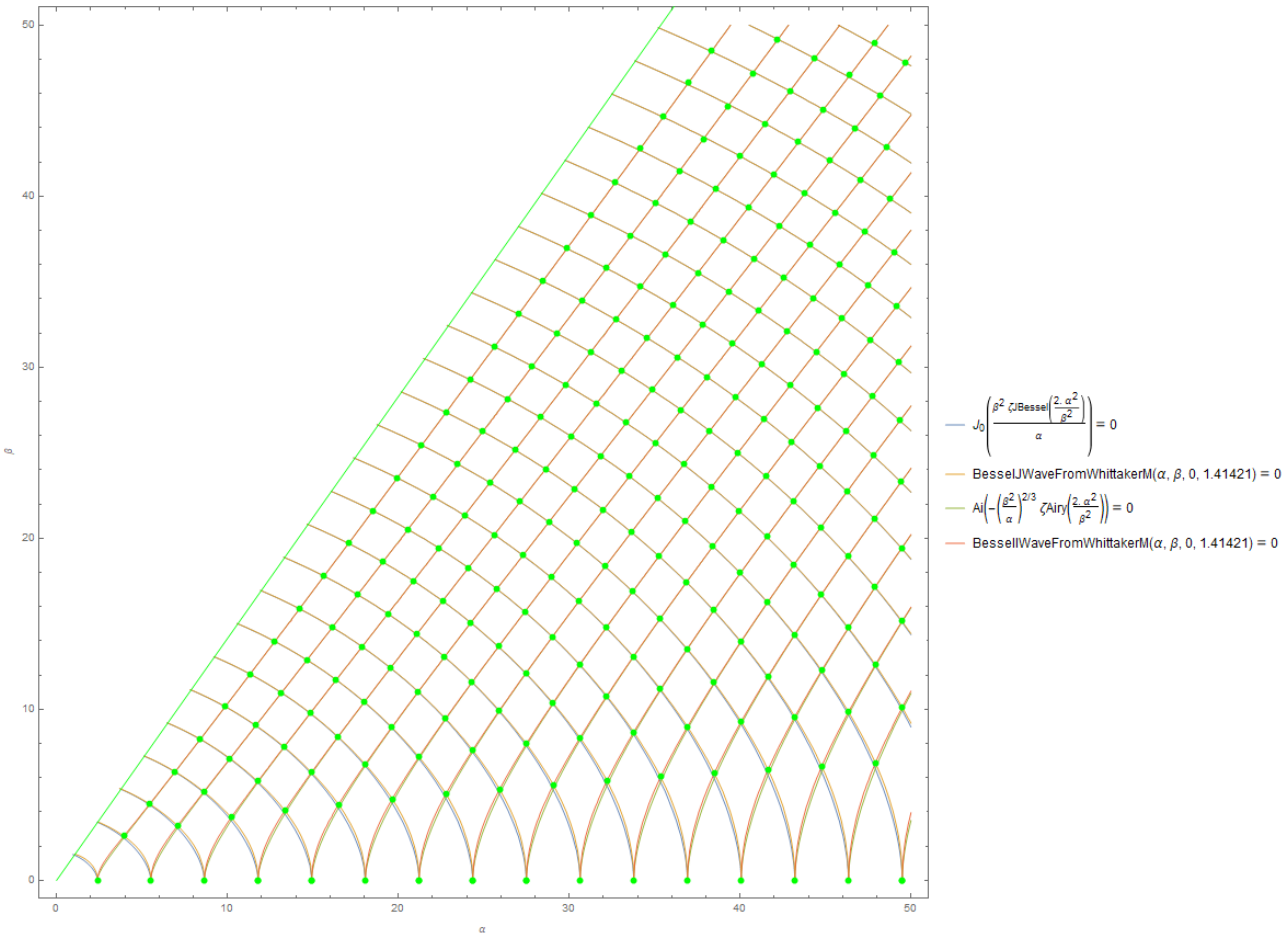
Voici le graphe des iso-valeurs nulles du système d'équations transcendantales pour p=4: les points d'intersections sont les racines recherchées. J'ai également matérialisé la droite isolant le quart de plan, l'indexation des racines, donc des valeurs propres du problème aux limites de Dirichlet et les points d'intersection sur l'abscisse qui sont calculés à l'aide des zéros de la fonction de Bessel d'ordre p/2,soit 2 :



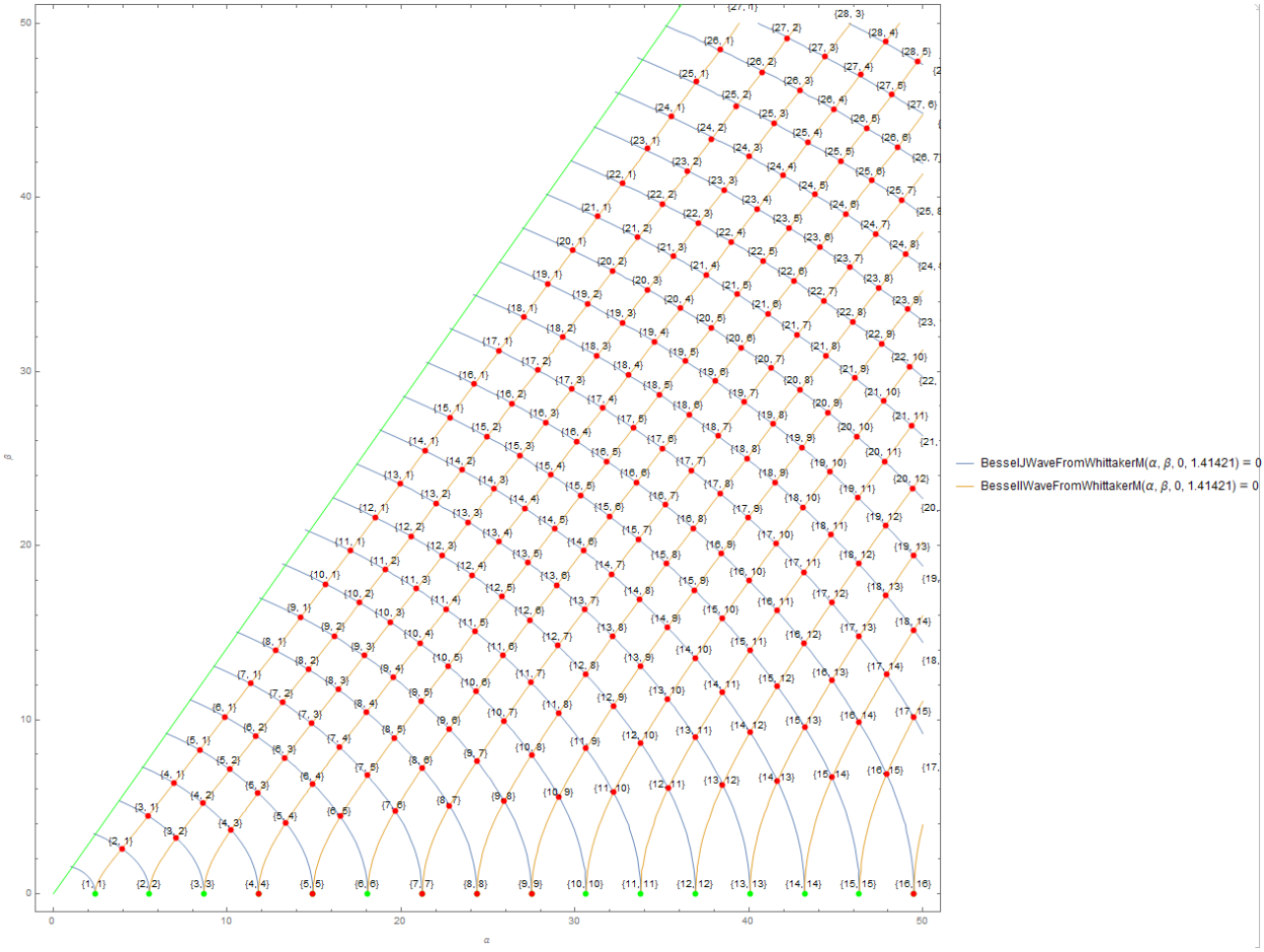
Ici le même graphe représente les iso-valeurs nulles du système d'équations transcendantales et le système asymptotique, afin d'illustrer la convergence vers les valeurs asymptotiques. On remarque toujours que plus l'ordre p est important moins la convergence est rapide :



La plus rapide convergence est obtenue avec l'ordre p=0, dont voici le graphe présentant les iso-valeurs nulles des équations transcendantales et des équations transcendantales asymptotique. L'exemple est intéressant car il concerne tous les problèmes sans dépendance azimutale ϕ.



Le système d'indexation se présente comme suit :



<u>*Orthogonalité bidimensionnelle des fonctions propres*</u>

Tout comme pour les problèmes de diffusion en coordonnées paraboliques cylindriques ou polaires, et comme les problèmes stationnaires (équation de Laplace) dans ces systèmes de coordonnées, les fonctions propres de l'équation de Helmholtz aux conditions aux limites homogènes présentent une orthogonalité bidimensionnelle, construite comme suit :

$$Soit \quad \alpha_1, \alpha_2 \quad deux\, valeurs\, propres\, distinctes \Rightarrow \{M_1(\mu), N_1(\nu)\} \quad \{M_2(\mu), N_2(\nu)\}$$

$$\begin{cases} (1) \quad \dfrac{N_1(\nu)}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\dfrac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right)+\dfrac{M_1(\mu)}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\dfrac{\partial N_1(\nu)}{\partial\nu}\right)+\left(\alpha_1{}^2\left(\mu^2+\nu^2\right)-p^2\left(\dfrac{1}{\mu^2}+\dfrac{1}{\nu^2}\right)\right)M_1(\mu)N_1(\nu)=0 \\ (2) \quad \dfrac{N_2(\nu)}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu\dfrac{\partial M_2(\mu)}{\partial\mu}\right)+\dfrac{M_2(\mu)}{\nu}\dfrac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu\dfrac{\partial N_2(\nu)}{\partial\nu}\right)+\left(\alpha_2{}^2\left(\mu^2+\nu^2\right)-p^2\left(\dfrac{1}{\mu^2}+\dfrac{1}{\nu^2}\right)\right)M_2(\mu)N_2(\nu)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2(\mu)N_2(\nu)\times(1)=0 \\ M_1(\mu)N_1(\nu)\times(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \nu\, N_1(\nu)N_2(\nu)\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu M_2(\mu)\dfrac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right)+\mu\, M_1(\mu)M_2(\mu)\dfrac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu N_2(\nu)\dfrac{\partial N_1(\nu)}{\partial\nu}\right)+ \\ +\mu\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)\left(\alpha_1{}^2-\alpha_2{}^2\right)M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu) \end{array}\right\}=0$$

$$Or \quad \int_0^{s_0} d\mu\,\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\mu M_2(\mu)\frac{\partial M_1(\mu)}{\partial\mu}\right)=0 \qquad \int_0^{s_0} d\nu\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\nu N_2(\nu)\frac{\partial N_1(\nu)}{\partial\nu}\right)$$

$$Comme \quad \alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow \int_0^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu\; \mu\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)M_1(\mu)N_1(\nu)M_2(\mu)N_2(\nu)=0$$

Cette orthogonalité bidimensionnelle s'étend aux deux jeux de fonctions propres qui possèdent les mêmes valeurs propres dans un problème géométrique symétrique (forme et conditions aux limites), à savoir pour les choix : $+\beta^2 \quad et \quad -\beta^2$ *. Ce sont les deux jeux de fonctions :*

$$Choix +\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} \Theta(\nu)=J_p(\alpha,\beta,\nu) \\ R(\mu)=I_p(\alpha,\beta,\mu) \end{cases} \qquad Choix -\beta^2 \Rightarrow \begin{cases} R(\mu)=J_p(\alpha,\beta,\mu) \\ \Theta(\nu)=I_p(\alpha,\beta,\nu) \end{cases}$$

Correspondant à un même système d'équations transcendantales. Pour ces fonctions, il faut donc prouver que des intégrales du type :

$$\int_0^{s_0} d\mu \int_0^{s_0} d\nu\; \mu\nu\left(\mu^2+\nu^2\right)I_p(\alpha,\beta,\mu)J_p(\alpha,\beta,\nu)J_p(\alpha,\beta,\mu)I_p(\alpha,\beta,\nu)=0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{s_0} d\mu\,\mu^3 I_p(\alpha,\beta,\mu)J_p(\alpha,\beta,\mu)\int_0^{s_0} d\nu\,\nu J_p(\alpha,\beta,\nu)I_p(\alpha,\beta,\nu)+ \\ \displaystyle+\int_0^{s_0} d\mu\mu\, I_p(\alpha,\beta,\mu)J_p(\alpha,\beta,\mu)\int_0^{s_0} d\nu\,\nu^3 J_p(\alpha,\beta,\nu)I_p(\alpha,\beta,\nu) \end{array}\right\}=0$$

$$\int_0^{s_0} dx\, x^3 J_p(\alpha,\beta,x)I_p(\alpha,\beta,x)=0 \qquad ou \qquad \int_0^{s_0} dx\, x\, J_p(\alpha,\beta,x)I_p(\alpha,\beta,x)=0$$

Pour ces deux dernières intégrales, reprenons l'équation d'onde de Bessel :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy_1(x)}{dx}\right)+x\left(\alpha^2x^2-\beta^2-\dfrac{p^2}{x^2}\right)y_1(x)=0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy_2(x)}{dx}\right)+x\left(\alpha^2x^2+\beta^2-\dfrac{p^2}{x^2}\right)y_2(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2(x)\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy_1(x)}{dx}\right)+x\left(\alpha^2x^2-\beta^2-\dfrac{p^2}{x^2}\right)y_1(x)y_2(x)=0 \\ y_1(x)\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{dy_2(x)}{dx}\right)+x\left(\alpha^2x^2+\beta^2-\dfrac{p^2}{x^2}\right)y_1(x)y_2(x)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(x\,y_2(x)\frac{dy_1(x)}{dx}-x\frac{dy_2(x)}{dx}y_1(x)\right)-2x\beta^2y_1(x)y_2(x)=0$$

$$\Rightarrow \int_0^{s_0}dx\frac{d}{dx}\left(x\,y_2(x)\frac{dy_1(x)}{dx}-x\frac{dy_2(x)}{dx}y_1(x)\right)=2\beta^2\int_0^{s_0}dx\,x\,y_1(x)y_2(x)=0$$

Ce qui prouve l'orthogonalité des fonctions propres d'une même valeur propre prise dans les deux jeux de fonctions.

<u>*Solutions du problème de refroidissement ou de réchauffement sur un paraboloïde symétrique de révolution complète*</u>

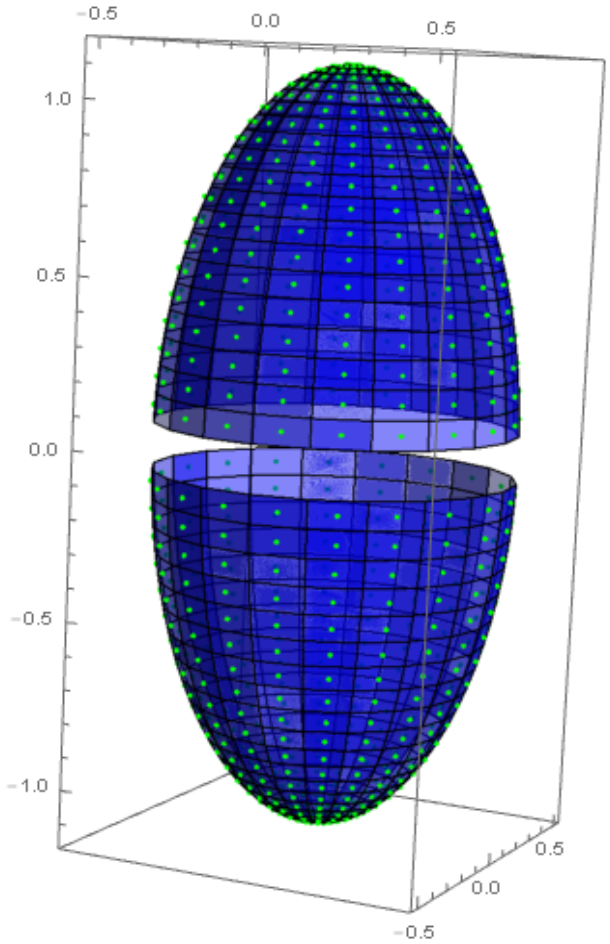
La solution du régime transitoire : $\begin{cases} C.L. \quad T_t(\mu,\nu,\varphi,t)\big|_{\substack{\mu=s_0\\ \nu=s_0}}=0 \\ C.I \quad T_t(\mu,\nu,\varphi,0)=T_0 \end{cases}$ *se développe en deux séries de fonctions propres deux à deux orthogonales, une série à double indexation et une série à simple indice, car la solution ne dépend plus de l'angle azimutale ϕ. D'autre part il faut également tirer partie de la symétrie complète en μ et ν de la solution, de la symétrie du domaine et de la condition aux limites. Avec les remarques d'orthogonalité deux à deux des fonctions propres polaires, la solution peut s'écrire sous la forme :*

$$T_t(\mu,\nu,t)=T_0\left\{\sum_{(n,m)/I_0(\alpha,\beta,s_0)=J_0(\alpha,\beta,s_0)=0}\left\{A_{(n,m)}\begin{Bmatrix} I_0(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu)J_0(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu)+ \\ J_0(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu)I_0(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu) \end{Bmatrix}e^{-\delta\frac{\alpha_{(n,m)}^2}{a^2}t}\right\}+\sum_{n/J_0\left(\frac{\alpha s_0^2}{2}\right)=0}B_nJ_0\left(\frac{\alpha_n\mu^2}{2}\right)J_0\left(\frac{\alpha_n\nu^2}{2}\right)e^{-\delta\frac{\alpha_n^2}{a^2}t}\right\}$$

où les 2 coefficients se calculent à partir de la condition initiale de température fixe au bord du domaine, à savoir :

$$A_{(n,m)}=\frac{\int_0^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\,\mu\nu(\mu^2+\nu^2)I_0(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu)J_0(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu)}{\int_0^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\,\mu\nu(\mu^2+\nu^2)I_0^2(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\mu)J_0^2(\alpha_{(n,m)},\beta_{(n,m)},\nu)} \qquad B_n=\frac{\int_0^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\,\mu\nu(\mu^2+\nu^2)J_0\left(\frac{\alpha_n\mu^2}{2}\right)J_0\left(\frac{\alpha_n\nu^2}{2}\right)}{\int_0^{s_0}d\mu\int_0^{s_0}d\nu\,\mu\nu(\mu^2+\nu^2)J_0^2\left(\frac{\alpha_n\mu^2}{2}\right)J_0^2\left(\frac{\alpha_n\nu^2}{2}\right)}$$

Problème de diffusion en coordonnées sphéroïdales allongées



Le système de coordonnées sphéroïdales allongées (prolate spheroidal) est défini par le changement de variable :

$$x = c\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi)$$
$$y = c\,Sinh(\eta)\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi)$$
$$z = c\,Cosh(\eta)\,Cos(\vartheta)$$

L'équation de diffusion en coordonnées sphéroïdales allongées 3D (η,ϑ,ϕ) s'écrit sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi,t)-\frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi,t)}{\partial t}=0 \quad T(\eta,\theta,\varphi,t)=U(\eta,\theta,\varphi)W(t)=H(u)\Theta(\theta)\Psi(\varphi)W(t)$$

$$\frac{1}{c^2\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\eta^2}+Cotanh(\eta)\frac{\partial U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\theta^2}+Cotan(\theta)\frac{\partial U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{c^2 Sinh^2(\eta)Sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}+\mu^2 U(\eta,\theta,\varphi)=0 \qquad Cotanh(\eta)=\frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)} \quad Cotan(\theta)=\frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d^2H(\eta)}{d\eta^2}+CoTanh(\eta)\dfrac{dH(\eta)}{d\eta}+\left(-\lambda+c^2\mu^2Sinh^2(\eta)-\dfrac{m^2}{Sinh^2(\eta)}\right)H(\eta)=0\\ \dfrac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2}+CoTan(\theta)\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta}+\left(\lambda+c^2\mu^2Sin^2(\theta)-\dfrac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right)\Theta(\theta)=0\\ \dfrac{d^2\Psi(\varphi)}{d\varphi^2}+m^2\Psi(\varphi)=0 \qquad \dfrac{1}{W(t)}\dfrac{\partial W(t)}{\partial t}=-\delta\mu^2\end{cases}$$

$$Posons \quad u=Cosh(\eta) \quad v=Cos(\theta)$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{du}\left(\left(1-u^2\right)\dfrac{dH(u)}{du}\right)+\left(\lambda+c^2\mu^2\left(1-u^2\right)-\dfrac{m^2}{1-u^2}\right)H(u)=0\\ \dfrac{d}{dv}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{d\Theta(v)}{dv}\right)+\left(\lambda+c^2\mu^2\left(1-v^2\right)-\dfrac{m^2}{1-v^2}\right)\Theta(v)=0\\ \dfrac{d^2\Psi(\varphi)}{d\varphi^2}+m^2\Psi(\varphi)=0 \qquad \dfrac{1}{W(t)}\dfrac{\partial W(t)}{\partial t}=-\delta\mu^2\end{cases}$$

La séparation complète des variables de l'équation de diffusion conduit à celle de ***<u>l'équation de Helmholtz</u>*** *sur la seule partie spatiale. Lorsque le problème ne dépend pas de la coordonnées azimutale, alors les équations séparées deviennent :*

$$Posons \quad u=Cosh(\eta) \quad v=Cos(\theta) \quad m=0$$

$$\begin{cases}\dfrac{d}{du}\left(\left(1-u^2\right)\dfrac{dH(u)}{du}\right)+\left(\lambda+c^2\mu^2\left(1-u^2\right)\right)H(u)=0\\ \dfrac{d}{dv}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{d\Theta(v)}{dv}\right)+\left(\lambda+c^2\mu^2\left(1-v^2\right)\right)\Theta(v)=0\end{cases}$$

La correspondance en coordonnées cartésiennes est définie comme suit :

$$u=Cosh(\eta) \quad v=Cos(\theta) \quad \begin{Bmatrix}x=c\sqrt{u^2-1}\,\sqrt{1-v^2}\,Cos(\varphi)\\ y=c\sqrt{u^2-1}\,\sqrt{1-v^2}\,Sin(\varphi)\\ z=c\,u\,v\end{Bmatrix} \quad r^2=x^2+y^2=c^2\left(u^2-1\right)\left(1-v^2\right)$$

L'équation de diffusion s'écrit maintenant :

$$On\ a \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2} + Cotanh(\eta)\dfrac{\partial}{\partial\eta} = -\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(1-u^2\right)\dfrac{\partial}{\partial u}\right) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2} + Cotan(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta} = \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial}{\partial v}\right) \end{cases}$$

$$\left\{\frac{1}{c^2\left(u^2-v^2\right)}\left(-\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1-u^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}\right)\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\frac{\partial}{\partial v}\right)\right)-\frac{1}{c^2\left(1-u^2\right)\left(1-v^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial t}\right\}T(u,v,\varphi,t)=0$$

$$\frac{1}{c^2\left(u^2-v^2\right)}\left\{-\frac{1}{H(u)}\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1-u^2\right)\frac{\partial H(u)}{\partial u}\right)+\frac{1}{\Theta(v)}\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\frac{\partial\Theta(v)}{\partial v}\right)\right\}-$$

$$-\frac{1}{c^2\left(1-u^2\right)\left(1-v^2\right)}\frac{1}{\Psi(\varphi)}\frac{\partial^2\Psi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{\delta W(t)}\frac{\partial W(t)}{\partial t}=-\mu^2$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{H(u)}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(1-u^2\right)\dfrac{\partial H(u)}{\partial u}\right)+\lambda+\mu^2c^2\left(1-u^2\right)-\dfrac{m^2}{\left(1-u^2\right)}=0 \\ \dfrac{1}{\Theta(v)}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial\Theta(v)}{\partial v}\right)+\lambda+\mu^2c^2\left(1-v^2\right)-\dfrac{m^2}{\left(1-v^2\right)}=0 \\ \dfrac{1}{\Psi(\varphi)}\dfrac{\partial^2\Psi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-m^2 \qquad \dfrac{1}{W(t)}\dfrac{\partial W(t)}{\partial t}=-\delta\mu^2 \end{cases}$$

<u>Orthogonalité des solutions de l'équation de Helmholtz pour les problèmes aux limites intérieur ou extérieur axi-symétriques, coordonnées sphéroïdales allongées</u>

Pour un problème du type :

$$\delta\Omega\ limite\,du\,domaine \quad \alpha\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial n}+\beta\,T(\eta,\theta,t)\Big|_{\delta\Omega}=0 \qquad T(\eta,\theta,t)\big|_{t=0}=T_0(\eta,\theta)=f(u,v)$$

Reprenons les équations différentielles précédentes pour chaque variable, notamment u, avec deux valeurs propres distinctes et leurs solutions respectives :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1-u^2\right)\frac{\partial H_1(u)}{\partial u}\right)+\left(\lambda_1+\mu_1{}^2c^2\left(1-u^2\right)\right)H_1(u)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1-u^2\right)\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)+\left(\lambda_2+\mu_2{}^2c^2\left(1-u^2\right)\right)H_2(u)=0$$

Il n'est pas possible d'établir une quelconque relation d'orthogonalité sur ces deux solutions à partir de ces deux équations différentielles. Et il en serait de même avec les fonctions de la variable v. En revanche en remontant à l'étape avant la séparation spatiale, on peut établir une relation d'orthogonalité bi-dimensionnelle, comme suit à partir des deux équations de Helmoltz avec des valeurs propres différentes :

$$\begin{cases} \Theta_1(v)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(u^2-1\right)\dfrac{\partial H_1(u)}{\partial u}\right)+H_1(u)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}\right)+\mu_1{}^2c^2\left(u^2-v^2\right)H_1(u)\Theta_1(v)=0 \\ \Theta_2(v)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(u^2-1\right)\dfrac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)+H_2(u)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)+\mu_2{}^2c^2\left(u^2-v^2\right)H_2(u)\Theta_2(v)=0 \end{cases}$$

Il vient par multiplication du produit croisé des fonctions :

$$\begin{cases} \Theta_1(v)\Theta_2(v)H_2(u)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(u^2-1\right)\dfrac{\partial H_1(u)}{\partial u}\right)+H_1(u)H_2(u)\Theta_2(v)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial \Theta_1(v)}{\partial v}\right)+ \\ +\mu_1{}^2c^2\left(u^2-v^2\right)H_1(u)\Theta_1(v)H_2(u)\Theta_2(v)=0 \\ \Theta_1(v)\Theta_2(v)H_1(u)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(u^2-1\right)\dfrac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)+H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial \Theta_2(v)}{\partial v}\right)+ \\ +\mu_2{}^2c^2\left(u^2-v^2\right)H_2(u)\Theta_2(v)H_1(u)\Theta_1(v)=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1(v)\Theta_2(v)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(u^2-1\right)\left(H_2(u)\dfrac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\dfrac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right)+ \\ H_1(u)H_2(u)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\dfrac{\partial \Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\dfrac{\partial \Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right)+ \\ +c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\left(u^2-v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)=0 \end{array} \right\}$$

Une double intégration spatiale sur le domaine étudié donne :

$$\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \int_{-1}^{+1} dv \left\{ \begin{array}{l} \Theta_1(v)\Theta_2(v)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(u^2-1\right)\left(H_2(u)\dfrac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\dfrac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right)+ \\ H_1(u)H_2(u)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\dfrac{\partial \Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\dfrac{\partial \Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right) \end{array} \right\} =$$

$$=-c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \int_{-1}^{+1} dv\left(u^2-v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)$$

Soit en intégrant sur les bornes du domaine pour chaque variable :

$$\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \frac{\partial}{\partial u}\left(\left(u^2-1\right)\left(H_2(u)\frac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right)\int_{-1}^{+1} dv\Theta_1(v)\Theta_2(v)+$$
$$+\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} duH_1(u)H_2(u)\int_{-1}^{+1} dv\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\frac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\frac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right)=$$
$$=-c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\int_{-1}^{+1} dv\left(u^2-v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)$$
$$\Rightarrow\left[\left(u^2-1\right)\left(H_2(u)\frac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right]_{u_{\min}}^{u_{\max}}\int_{-1}^{+1} dv\Theta_1(v)\Theta_2(v)+$$
$$+\left[\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\frac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\frac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right]_{-1}^{+1}\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} duH_1(u)H_2(u)=$$
$$=-c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\int_{-1}^{+1} dv\left(u^2-v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)$$
$$Comme\quad\left[\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\frac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\frac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right]_{-1}^{+1}=0$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\left(u^2-1\right)\left(H_2(u)\frac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right]_{u_{\min}}^{u_{\max}}\int_{-1}^{+1} dv\Theta_1(v)\Theta_2(v)\\=-c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\int_{-1}^{+1} dv\left(u^2-v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)\end{array}\right\}$$

Comme on le voit, sur le domaine angulaire le terme s'annule. Il en serait de même s'il s'agissait d'un secteur angulaire en raison des conditions aux limites imposées sur les bords du domaine, de type Dirichlet, Neumann ou Robin. Sur le domaine radial, si les limites sont finies, alors le terme s'annule sans ambiguïté en raison des conditions aux limites homogènes imposées (Dirichlet, Neumann ou Robin). Si la limite radiale est η=0, alors u=Cosh(η)=1 et le terme u^2-1 s'annule. Si le problème est extérieur alors les fonctions sont contraintes à s'annuler à l'infini et le terme s'annule également. Donc il vient la relation d'orthogonalité bidimensionnelle suivantes :

$$Si\quad\mu_1\neq\mu_2\Rightarrow\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\neq 0\quad u=Cosh(\eta)\quad v=Cos(\vartheta)$$
$$\Rightarrow\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\int_{-1}^{+1} dv\left(u^2-v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)=0$$

Ici on remarque que :

$$u=Cosh(\eta)\quad v=Cos(\theta)\Rightarrow u^2-v^2=Cosh^2(\eta)-Cos^2(\theta)=Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)$$

Orthogonalité des solutions de l'équation de Helmholtz pour les problèmes aux limites intérieur ou extérieur axi-symétriques avec la solution de valeur propre nulle dans le cas du problème de Neumann, coordonnées sphéroïdales allongées

Le problème aux limites de Neumann sur la partie radiale admet la solution de valeur propre nulle comme solution. Il s'agit évidemment de la solution triviale constante :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1-u^2\right)\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}\right)+\left(\lambda_0+\mu_0{}^2c^2\left(1-u^2\right)\right)H_0(u)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\frac{\partial \Theta_0(v)}{\partial v}\right)+\left(\lambda_0+\mu_0{}^2c^2\left(1-v^2\right)\right)\Theta_0(v)=0$$
$$H_0(u)=Cste \quad \Theta_0(v)=Cste \quad \lambda_0=\mu_0=0$$

Dans ces conditions on peut conclure qu'il y a bien orthogonalité des solutions avec la solution de de valeur propre nulle, soit que l'intégrale suivante doit obligatoirement s'annuler :

$$Si \quad \mu_1 \neq 0 \quad u=Cosh(\eta) \quad v=Cos(\vartheta)$$
$$\Rightarrow \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \int_{-1}^{+1} dv\left(u^2-v^2\right)H_1(u)\Theta_1(v)=0$$
$$\Rightarrow \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\, u^2 H_1(u)\int_{-1}^{+1} dv\,\Theta_1(v)-\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du H_1(u)\int_{-1}^{+1} dv\, v^2\Theta_1(v)=0$$

Conséquence de l'orthogonalité des solutions du problèmes aux limites, coordonnées sphéroïdales allongées

En supposant qu'il existe bien un jeu discret et infini de valeurs propres solutions du problème aux limites homogènes bidimensionnel, et en indiçant le jeu de fonctions propres correspondantes, on peut écrire la solution du problème aux limites sous la forme d'une série :

$$T(\eta,\vartheta)=T(u,v)=\sum_{n=1}^{n=+\infty} A_n H_n(u)\Theta_n(v) \qquad tq \quad A_n=\frac{\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \int_{-1}^{+1} dv\left(u^2-v^2\right)f(u,v)H_n(u)\Theta_n(v)}{\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \int_{-1}^{+1} dv\left(u^2-v^2\right)\left(H_n(u)\right)^2\left(\Theta_n(v)\right)^2}$$

Contrainte de régularité du gradient à l'origine des coordonnées sphéroïdales allongées

La contrainte de régularité du gradient s'applique également aux solutions du problème de diffusion, tout comme le problème de Laplace, dès lors que l'origine des coordonnées est incluse dans le domaine d'étude. Cela veut dire que les solutions doivent respecter à l'origine des coordonnées les formes suivantes, indépendamment du temps :

$$\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi,t)}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi,t)}{\partial \theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}} \propto Cste\left(Sinh^2(\eta)+Sin^2(\theta)\right) \quad et \quad \left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi,t)}{\partial \phi}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}} \propto Cste\, Sinh(\eta)^2\, Sin(\theta)^2$$

On a vu que pour le problème stationnaire de Laplace, les seules solutions que sont les fonctions de Legendre associées P respectent cette contrainte. Les fonctions de Legendre associées Q divergeant à l'origine suffisent à les disqualifier . Pour ce qui des solutions de l'équation de Helmholtz, il en est de même.

Pour la dimension radiale et angulaire, les solutions séparées du problème de diffusion sont des fonctions sphéroïdales radiales et angulaires de première et deuxième espèce. Je prendrais pour ces dernières un mixte des notations de NIST Handbook of Mathematical Functions, Chapitre 30 "Spheroidal Wave Functions » et de celle données par l'un des ouvrages de référence sur ces fonctions de « J.Meixner.F.W.Schafke , Sphaeroid funktionen » (en allemand). On notera $\gamma^2=c^2\mu^2$ *pour le paramètre dit de « sphéroïdicité », et les fonctions s'écrivent :*

$$\begin{cases} H(\eta)=\begin{cases} A\, S_n^{(1),m}\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right)+B\, S_n^{(2),m}\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right) \\ A\, Ps_n^m\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right)+B\, Qs_n^m\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right) \end{cases} & fonctions\ sphéroïdales\ radiales \\ \Theta(v)=C\ ps_n^m\left(Cos(\theta),\gamma^2\right)+D\ qs_n^m\left(Cos(\theta),\gamma^2\right) & fonctions\ sphéroïdales\ angulaires \\ \Psi(\varphi)=E\ Cos(m\varphi)+F\ Sin(m\varphi) \end{cases}$$

L'équation différentielles des fonctions radiales et angulaires est la même :

$$\left(\left(1-x^2\right)y'(x)\right)'+\left(\lambda+\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y'(x)=0$$

Dans un problème où le sphéroïde est complet alors m est un paramètre entier. Dans ce cas la valeur caractéristique λ est une fonction « infiniment multi-valuée » dont chaque « branche » (indexée par le paramètre d'ordre n entier) dépend continuement de la « sphéroïdicité » γ. Pour se figurer « l'origine » de cet ordre n, il suffit de considérer la valeur caractéristique λ lorsque γ=0 : $\lambda=n(n+1)$*, sachant que l'on reconnaît le paramètre usuel dans l'équation de Legendre. Si le sphéroïde n'est pas complet alors m n'est plus nécessairement un entier, on le note souvent μ et dans ce cas le paramètre n généré par la limite γ=0 n'est plus un entier, on le note communément v . Les fonctions se notent alors :*

$$\begin{cases} x\in[1,+\infty] & \begin{cases} S_v^{(1),\mu}\left(x,\gamma^2\right), S_v^{(2)\mu}\left(x,\gamma^2\right) \\ Ps_v^{\mu}\left(x,\gamma^2\right), Qs_v^{\mu}\left(x,\gamma^2\right) \end{cases} & fonctions\ radiales \\ x\in[-1,+1] & ps_v^{\mu}\left(x,\gamma^2\right), qs_v^{\mu}\left(x,\gamma^2\right) & fonctions\ angulaires \end{cases}$$

Pour les fonctions radiales, les deux formes sont équivalentes l'une avec des fonctions S dont le développement est réalisé à l'aide de fonctions de Bessel sphériques, et l'autre avec des fonctions associées de Legendre sur l'intervalle [1,+∞) (soit de type 3 selon Mathematica par exemple). Ces deux types de fonctions sont reliées par un constante appelée facteur de jointure sphéroïdale :

$$S_n^{(1),m}\left(x,\gamma^2\right)=K_n^{(1),m}\left(\gamma^2\right)Ps_n^m\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right) \qquad S_n^{(2),m}\left(x,\gamma^2\right)=K_n^{(2),m}\left(\gamma^2\right)Qs_n^m\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right)$$

La caractéristique importante des fonctions sphéroïdales est qu'elles se développent à l'aide des fonctions associées de Legendre :

$$x\in[-1,+1] \quad \begin{cases} ps_n^m\left(x,\gamma^2\right)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k a_{n,k}^m\left(\gamma^2\right)P_{n+2k}^m(x) \\ qs_n^m\left(x,\gamma^2\right)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k a_{n,k}^m\left(\gamma^2\right)Q_{n+2k}^m(x) \end{cases}$$

$$x\in[1,+\infty] \quad \begin{cases} Ps_n^m\left(x,\gamma^2\right)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k a_{n,k}^m\left(\gamma^2\right)P_{n+2k}^m(x) \\ Qs_n^m\left(x,\gamma^2\right)=\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}(-1)^k a_{n,k}^m\left(\gamma^2\right)Q_{n+2k}^m(x) \end{cases}$$

Dès lors on peut utiliser ces développements pour écarter les fonctions sphéroïdales de deuxième espèce pour répondre à la contrainte de régularité du gradient, du simple fait que ses composantes Q divergent chacune à l'origine des coordonnées. Pour la même raison la fonction sphéroïdale de première espèce répond à la contrainte de régularité du gradient car chacune de ses composantes P fonctions de Legendre associées de première espèce assure cette régularité.

Dans un problème de diffusion intérieur les fonctions compatibles sont donc :

$$ps_n^m\left(Cos(\vartheta),\gamma^2\right) \qquad Ps_n^m\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right) \quad ou \quad S_n^{(1),m}\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right)$$

Si les conditions aux limites et la condition initiale n'a pas de dependance azimutale φ, alors seule la valeur m=0 sera utilisée, soit le jeu de fonctions :

$$ps_n^0\left(Cos(\vartheta),\gamma^2\right) \qquad Ps_n^0\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right) \quad ou \quad S_n^{(1),0}\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right)$$

<u>Contrainte de finitude des solutions pour un problème extérieur en coordonnées sphéroïdales allongées</u>

La fonction sphéroïdale angulaire de deuxième espèce n'est pas définie en Cos[θ]=1 et Cos[θ]=-1, elle ne peut donc être utiliser dans un problème de diffusion extérieur sur un sphéroïde complet. Pour les fonctions sphéroïdales radiales de première ou deuxième espèce elles sont au demeurant toutes les deux finies. Là encore les fonctions compatibles sont :

$$ps_n^m\left(Cos(\vartheta),\gamma^2\right) \qquad Ps_n^m\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right) \quad ou \quad S_n^{(1),m}\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right)$$

Et sans dépendance azimutale φ, le jeu de fonctions devient :

$$ps_n^0\left(Cos(\vartheta),\gamma^2\right) \qquad Ps_n^0\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right) \quad ou \quad S_n^{(1),0}\left(Cosh(\eta),\gamma^2\right)$$

Problème de Dirichlet : refroidissement ou réchauffement intérieur sans dépendance azimutale, coordonnées sphéroïdales allongées

Les deux problèmes ont une solution commune construite à partir du régime transitoire :

$$\begin{cases}\Delta T(\eta,\theta,t)-\dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial t}=0\\ \eta\in[0,l_\eta] \qquad \theta\in[0,\pi]\end{cases} \quad \textit{Refroidissement} \quad \begin{cases}T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta}=0\\ T_t(\eta,\theta,t)\big|_{t=0}=T_0\end{cases} \quad \textit{Réchauffement} \quad \begin{cases}T(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta}=T_0\\ T(\eta,\theta,t)\big|_{t=0}=0\\ T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta}=0 \quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{t=0}=T_0\\ T(\eta,\theta,t)=T_0-T_t(\eta,\theta,t)\end{cases}$$

$$\lambda=\lambda_n^0(\gamma^2) \quad \begin{cases}H(\eta)=S_n^{(1),0}(Cosh(\eta),\gamma^2)\\ \Theta(\theta)=ps_n^0(Cos(\theta),\gamma^2)\end{cases}$$

$$n\in\mathbf{N}\Rightarrow ps_n^0(Cos(\theta),\gamma^2) \quad \textit{fonction régulière sur } [-1,+1] \quad \lim_{x\to 1,-1} qs_n^0(x,\gamma^2)=\infty \quad S_n^{(1),0}(Cosh(\eta),\gamma^2)\Leftarrow \textit{régularité du gradient}$$

$$T_t(\eta,\theta,t)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty}A_{n,l}S_n^{(1),0}(Cosh(\eta),\gamma_{n,l}{}^2)\,ps_n^0(Cos(\theta),\gamma_{n,l}{}^2)\;e^{-\delta\frac{\gamma_{n,l}{}^2}{c^2}t} \qquad \gamma_{n,l} \quad tq \quad S_n^{(1),0}(Cosh(l_\eta),\gamma_{n,l}{}^2)=0$$

De la relation d'orthogonalité on tire la valeur des coefficients :

$$A_{n,l}=\frac{\displaystyle\int_1^{Cosh(l_\eta)}du\,S_n^{(1),0}(u,\gamma_{n,l}{}^2)\int_{-1}^{+1}dv(u^2-v^2)ps_n^0(v,\gamma_{n,l}{}^2)}{\displaystyle\int_1^{Cosh(l_\eta)}du\left(S_n^{(1),0}(u,\gamma_{n,l}{}^2)\right)^2\int_{-1}^{+1}dv(u^2-v^2)\left(ps_n^0(v,\gamma_{n,l}{}^2)\right)^2} \qquad \gamma_{n,l} \quad tq \quad S_n^{(1),0}(Cosh(l_\eta),\gamma_{n,l}{}^2)=0$$

$$T_t(\eta,\theta,t)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty}A_{n,l}S_n^{(1),0}(Cosh(\eta),\gamma_{n,l}{}^2)ps_n^0(Cos(\theta),\gamma_{n,l}{}^2)\;e^{-\delta\frac{\gamma_{n,l}{}^2}{c^2}t}$$

Par ailleurs, la condition initiale étant une constante, seule les fonctions propres doivent contribuer au développement en série. Ce que l'on peut aisément voir par l'annulation des coefficients pour n impaire, du fait de l'imparité des fonctions sphéroïdales d'ordre impair:

$$ps_{2n+1}^0(v,\gamma_{2n+1,l}{}^2) \quad \textit{impaire en } v\Rightarrow\int_{-1}^{+1}dv\;ps_{2n+1}^0(v,\gamma_{2n+1,l}{}^2)=\int_{-1}^{+1}dv\;v^2\,ps_{2n+1}^0(v,\gamma_{2n+1,l}{}^2)=0$$

$$\Rightarrow\int_1^{Cosh(l_\eta)}du\,S_{2n+1}^{(1),0}(u,\gamma_{n,l}{}^2)\int_{-1}^{+1}dv(u^2-v^2)ps_n^0(v,\gamma_{2n+1,l}{}^2)=0\Rightarrow A_{2n+1,l}$$

$$T_t(\eta,\theta,t)=\sum_{n=0}^{n=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty}A_{2n,l}S_{2n}^{(1),0}(Cosh(\eta),\gamma_{2n,l}{}^2)ps_{2n}^0(Cos(\theta),\gamma_{2n,l}{}^2)\;e^{-\delta\frac{\gamma_{2n,l}{}^2}{c^2}t}$$

Avant de donner quelques valeurs propres, remarquons que pour n>0, une valeur γ nulle est « solution » de l'équation transcendantale : $n \geq 1 \quad \gamma_{n,1} = 0 \quad puisque \quad S_n^{0(1)}\left(Cosh\left(l_\eta\right),0\right) = 0$ *. Mais comme on l'a vu dans les propriétés des fonctions radiales, la fonction radiale de première espèce serait alors identiquement nulle, ce qui n'est d'aucune utilité. De plus une valeur γ=0 ne respecterait pas la convergence dans le temps t de la solution vers une fonction identiquement nulle.*

D'autre part il se trouve que dans les solutions construites ainsi, la convergence de la série est en réalité relativement lente, cela implique qu'il faut trouver un nombre relativement important de valeurs des indices l et n, par exemple 20 valeurs pour les deux jeux d'indices, soit 400 fonctions propres à calculer. C'est alors qu'un problème majeur intervient, le calcul des fonctions sphéroïdales angulaires comme radiales présente des instabilités numériques lorsque :
- le degré n est important
- la sphéroïdicité γ est importante

Lorsque la sphéroïdicité γ est importante, par exemple 30, on peut substituer aux fonctions radiales et angulaires les expressions asymptotiques correspondante. Il en est de même pour des degrés n important, par exemple supérieur à 10. Il est plus difficile de trouver des expressions asymptotiques lorsque n et γ sont tout deux importants.

Toujours est-il que l'on peut donner quelques valeurs propres de « sphéroïdicité » non nulles, successivement pour des dégrés n correspondant n=0,1,2 ,... pour un sphéroïde allongée de rapport du petit axe sur le grand axe b/a=1/2, soit l_η*=ArcTanh[b/a]. Point n'est besoin ici de produire le facteur d'échelle c=Sqrt[a^2-b^2], ni de valeur au grand axe a :*

n=0, γ= {4.674626121517116, 10.03575976817012, 15.455290848053762, 20.886501647945238, 26.32201416600936, 31.759360812046815}
n=1, γ= {5.681031048782296, 10.983266519338544, 16.387732681240823, 21.812035426259563, 27.243581552460768, 32.67796283915878}
n=2, γ = {6.750904798170054, 11.96500262325876, 17.343128863615334, 22.75481079669266, 28.178948469709027, 33.60736679275384}
n=3, γ = {7.868364760497052, 12.977697913562801, 18.32010253049168, 23.714078231295307, 29.12764514842592, 34.54601545847964}
n=4, γ = {9.021097063348488, 14.018322808201107, 19.317321339256253, 24.689102079502526, 30.089207483177436, 35.50117197178012}
n=5, γ = {10.199843210554095,15.084126681760274,20.333508464359756,25.679164490724876,31.06317874160324,36.463753035379625}
n=6, γ = {11.397689310058865,16.172651246192718,21.367450464081436,26.683568596518356,32.049111044291415,37.43655356381208}
n=7, γ = {12.609434779104783,17.281724290708826,22.418002463195997,27.70164101178584,33.04656665250127,38.419262219127816}
n=8, γ = {13.831108507655646,18.409438449170118,23.484091115049573,28.732733721983507,34.055119170810855,39.41156994018558}
n=9, γ = {15.059621823860663,19.554118927289977,24.564715793059957,29.776225426935227,35.07435502167296,40.41316992835499}
n=10, γ = {16.292528406488085,20.714283697383557,25.65894842450702,30.831522412399032,36.0647362192951,41.42375774679427}

Problème de Dirichlet : refroidissement ou réchauffement extérieur, sans dépendance azimutale, coordonnées sphéroïdales allongées

Les deux problèmes ont une solution commune construite à partir du régime transitoire sur une situation initiale qui revient à la résolution du problème stationnaire extérieure de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta T(\eta,\theta,t) - \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial t} = 0 \\ \eta \in [l_\eta, +\infty] \quad \theta \in [0,\pi] \\ \lim\limits_{\eta\to+\infty} T(\eta,\theta,t) \to 0 \end{cases} \qquad \textit{Refroidissement} \quad \begin{cases} T(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta} = 0 \\ T(\eta,\theta,t)\big|_{t=0} = T_s(\eta) \end{cases} \qquad \textit{Réchauffement} \quad \begin{cases} T(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta} = T_0 \\ T(\eta,\theta,t)\big|_{t=0} = 0 \\ T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta} = 0 \quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{t=0} = T_s(\eta) \\ T(\eta,\theta,t) = T_s(\eta) - T_t(\eta,\theta,t) \end{cases}$$

$$\textit{Régime stationnaire} \quad T_s(\eta) = T_0 \frac{Q_0(Cosh(\eta))}{Q_0(Cosh(l_\eta))} = T_0 \frac{Log\left(Coth\left(\dfrac{\eta}{2}\right)\right)}{Log\left(Coth\left(\dfrac{l_\eta}{2}\right)\right)} \qquad \lim_{\eta\to+\infty} T_s(\eta) \to 0$$

Du fait de la seule contrainte de finitude de la solution, les fonctions sphéroïdales radiales S1 et S2 sont possiblement solutions, et la contrainte de régularité du gradient ne s'applique plus. Or la combinaison linéaire suivante des fonctions radiales respecte invariablement la condition homogène de Dirichlet :

$$\begin{cases} F(\eta) = S_n^{(1),0}(Cosh(\eta),\gamma^2) S_n^{(2),0}(Cosh(l_\eta),\gamma^2) - S_n^{(1),0}(Cosh(l_\eta),\gamma^2) S_n^{(2),0}(Cosh(\eta),\gamma^2) \\ F(\eta)\big|_{l_\eta} = 0 \end{cases}$$

En quelque sorte cela pourrait indiquer qu'un spectre continu de valeur de γ convient comme solution, mais comme je n'ai pas à ma disposition de transformation intégrale quelconque construite à l'aide des fonctions sphéroïdales et qui admette un théorème d'inversion, je suis bien embêté pour construire la solution du régime transitoire.

Certains auteurs proposent une astuce pour contourner le problème en transformant le problème extérieur en problème intérieure sur un sphéroïde creux dont l'une des limites est suffisamment grande pour figurer en bonne approximation un grand rayon. Sur la limite extérieure s'applique alors non pas la condition homogène de Dirichlet, mais une condition homogène de Robin, en tirant partie de la solution du régime permanent :

$$x = Cosh(\eta) \Rightarrow Coth\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow T_s(\eta) = T_s(x) = \frac{Log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}{Log\left(\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\right)}$$

$$\Rightarrow Log\left(\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)\frac{dT_s(x)}{dx} = \frac{2}{1-x^2} \Rightarrow \frac{2}{1-x^2}T_s(x) - Log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\frac{dT_s(x)}{dx} = 0$$

Soit donc le problème suivant de refroidissement (uniquement) :

$$\begin{cases} \Delta T(\eta,t) - \dfrac{1}{\delta}\dfrac{\partial T(\eta,t)}{\partial t} = 0 \\ \eta \in [\eta_1,\eta_2] \quad x = Cosh(\eta) \\ x_1 = Cosh(\eta_1) \qquad x_2 = Cosh(\eta_2) \end{cases} \qquad Refroidissement \quad \begin{cases} T(x,\theta,t)\big|_{x=x_1} = 0 \\ \dfrac{2}{1-x^2}T(x,\theta,t) - Log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\dfrac{\partial T(x,\theta,t)}{\partial x}\Bigg|_{x=x_2} = 0 \\ T(x,\theta,t)\big|_{t=0} = T_s(x) \end{cases}$$

$$Régime\ stationnaire \quad \begin{cases} \Delta T(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\left(1-x^2\right)\dfrac{dT(x)}{dx}\right) = 0 \qquad T_s(x)\big|_{x=x_1} = T_0 \\ \dfrac{2}{1-x^2}T_s(x) - Log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)\dfrac{dT_s(x)}{dx}\Bigg|_{x=x_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow T_s(x) = T_0\frac{Q_0(x)}{Q_0(x_1)} = T_0\frac{Log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)}{Log\left(\dfrac{x_1+1}{x_1-1}\right)}$$

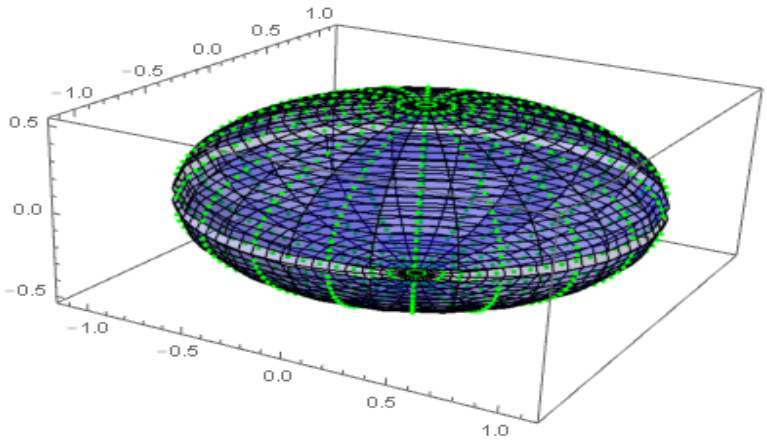
Dans ces conditions aux limites, l'équation transcendantale permettant de déterminer les valeurs propres γ prend la forme suivante :

$$F(x) = S_n^{(1),0}(x,\gamma^2)S_n^{(2),0}(x_1,\gamma^2) - S_n^{(1),0}(x_1,\gamma^2)S_n^{(2),0}(x,\gamma^2)$$

$$\begin{cases} F(x_1) = 0 \\ \dfrac{2}{1-x_2^{\,2}}F(x_2) - Log\left(\dfrac{x_2+1}{x_2-1}\right)F'(x_2) = 0 \\ \Rightarrow \dfrac{2}{1-x_2^{\,2}}\left(S_n^{0(1)}(x_2,\gamma^2)S_n^{0(2)}(x_1,\gamma^2) - S_n^{0(1)}(x_1,\gamma^2)S_n^{0(2)}(x_2,\gamma^2)\right) - Log\left(\dfrac{x_2+1}{x_2-1}\right)\left(S_n^{(1),0}{}'(x_2,\gamma^2)S_n^{(2),0}(x_1,\gamma^2) - S_n^{(1),0}(x_1,\gamma^2)S_n^{(2),0}{}'(x_2,\gamma^2)\right) = 0 \end{cases}$$

à finir, c'est hasardeux

Problème de diffusion en coordonnées sphéroïdales aplaties



Ce système de coordonnées est défini par le changement de variable : $\begin{array}{l} x = c\,Cosh(\eta)\,Sin(\vartheta)Cos(\varphi) \\ y = c\,Cosh(\eta)\,Sin(\vartheta)Sin(\varphi) \\ z = c\,Sinh(\eta)\,Cos(\vartheta) \end{array}$

L'équation de diffusion en coordonnées sphéroïdales aplaties 3D (η,ϑ,ϕ) s'écrit sous la forme :

$$\Delta T(\eta,\theta,\varphi,t) - \frac{1}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi,t)}{\partial t} = 0 \quad T(\eta,\theta,\varphi,t) = U(\eta,\theta,\varphi)W(t) \quad H(\eta)\Theta(\theta)\Psi(\varphi)$$

$$Cotanh(\eta) = \frac{Cosh(\eta)}{Sinh(\eta)} \quad Tanh(\eta) = \frac{Sinh(\eta)}{Cosh(\eta)} \quad CoTan(\theta) = \frac{Cos(\theta)}{Sin(\theta)} \quad W'(t) + \frac{\mu^2}{\delta}\frac{\partial T(\eta,\theta,\varphi,t)}{\partial t} = 0$$

$$\frac{1}{c^2\left(Cosh^2(\eta) - Sin^2(\theta)\right)}\left(\frac{\partial^2 U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \eta^2} + Tanh(\eta)\frac{\partial U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \theta^2} + Cotan(\theta)\frac{\partial U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\right)$$

$$+\frac{1}{c^2 Cosh^2(\eta)Sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 U(\eta,\theta,\varphi)}{\partial \varphi^2} + \mu^2 U(\eta,\theta,\varphi) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 H(\eta)}{d\eta^2} + Tanh(\eta)\dfrac{dH(\eta)}{d\eta} + \left(-\lambda + c^2\mu^2 Cosh^2(\eta) + \dfrac{m^2}{Cosh^2(\eta)}\right)H(\eta) = 0 \\ \dfrac{d^2\Theta(\theta)}{d\theta^2} + CoTan(\theta)\dfrac{d\Theta(\theta)}{d\theta} + \left(\lambda - c^2\mu^2 Sin^2(\theta) - \dfrac{m^2}{Sin^2(\theta)}\right)\Theta(\theta) = 0 \\ \dfrac{d^2\Psi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\Psi(\varphi) = 0 \end{cases}$$

$$Posons \quad u = iSinh(\eta) \quad v = Cos(\theta) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{du}\left(\left(1-u^2\right)\dfrac{dH(u)}{du}\right) + \left(\lambda - c^2\mu^2\left(1-u^2\right) - \dfrac{m^2}{1-u^2}\right)H(u) = 0 \\ \dfrac{d}{dv}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{d\Theta(v)}{dv}\right) + \left(\lambda - c^2\mu^2\left(1-v^2\right) - \dfrac{m^2}{1-v^2}\right)\Theta(v) = 0 \\ \dfrac{d^2\Psi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2\Psi(\varphi) = 0 \end{cases}$$

Lorsque le problème ne dépend pas de la coordonnées azimutale, alors les équations séparées deviennent :

$$\left|\begin{array}{l} Posons \quad u = iSinh(\eta) \quad v = Cos(\theta) \quad m = 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{du}\left(\left(1-u^2\right)\dfrac{dH(u)}{du}\right)+\left(\lambda - c^2\mu^2\left(1-u^2\right)\right)H(u)=0 \\ \dfrac{d}{dv}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{d\Theta(v)}{dv}\right)+\left(\lambda - c^2\mu^2\left(1-v^2\right)\right)\Theta(v)=0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} Posons \quad u = Sinh(\eta) \quad v = Cos(\theta) \quad m = 0 \\ \left\{\begin{array}{l} \Theta(v)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\dfrac{\partial H(u)}{\partial u}\right)+H(u)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial\Theta(v)}{\partial v}\right)+c^2\mu^2\left(u^2+v^2\right)H(u)\Theta(v)=0 \\ \dfrac{d}{du}\left(\left(1+u^2\right)\dfrac{dH(u)}{du}\right)-\left(\lambda - c^2\mu^2\left(1+u^2\right)\right)H(u)=0 \\ \dfrac{d}{dv}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{d\Theta(v)}{dv}\right)+\left(\lambda - c^2\mu^2\left(1-v^2\right)\right)\Theta(v)=0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

La correspondance en coordonnées cartésiennes est définie comme suit :

$$u = Sinh(\eta) \quad v = Cos(\theta) \quad \left\{\begin{array}{l} x = c\sqrt{1+u^2}\ \sqrt{1-v^2}\,Cos(\varphi) \\ y = c\sqrt{1+u^2}\ \sqrt{1-v^2}\,Sin(\varphi) \\ z = c\,u\,v \end{array}\right\} \quad r^2 = x^2+y^2 = c^2\left(1+u^2\right)\left(1-v^2\right)$$

L'équation de diffusion s'écrit maintenant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2}{\partial\eta^2}+Tanh(\eta)\dfrac{\partial}{\partial\eta}=\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\dfrac{\partial}{\partial u}\right) \\ \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}+Cotan(\theta)\dfrac{\partial}{\partial\theta}=\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial}{\partial v}\right) \end{array}\right.$$

$$\left(\frac{1}{c^2\left(u^2+v^2\right)}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\frac{\partial}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\frac{\partial}{\partial v}\right)\right\}+\frac{1}{a^2\left(1+u^2\right)\left(1-v^2\right)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{\delta}\frac{\partial}{\partial t}\right)T(u,v,\varphi,t)=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^2\left(u^2+v^2\right)}\left\{\frac{1}{H(u)}\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\frac{\partial H(u)}{\partial u}\right)+\frac{1}{\Theta(v)}\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\frac{\partial\Theta(v)}{\partial v}\right)\right\}+$$

$$+\frac{1}{c^2\left(1+u^2\right)\left(1-v^2\right)}\frac{1}{\Psi(\varphi)}\frac{\partial^2\Psi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{\delta}\frac{\partial W(t)}{\partial t}=-\mu^2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{H(u)}\dfrac{d}{du}\left(\left(1+u^2\right)\dfrac{dH(u)}{du}\right)-\left(\lambda - c^2\mu^2\left(1+u^2\right)-\dfrac{m^2}{1+u^2}\right)=0 \\ \dfrac{1}{\Theta(v)}\dfrac{d}{dv}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{d\Theta(v)}{dv}\right)+\left(\lambda - c^2\mu^2\left(1-v^2\right)-\dfrac{m^2}{1-v^2}\right)=0 \\ \dfrac{1}{\Psi(\varphi)}\dfrac{\partial^2\Psi(\varphi)}{\partial\varphi^2}=-m^2 \qquad \dfrac{1}{W(t)}\dfrac{\partial W(t)}{\partial t}=-\delta\mu^2 \end{array}\right.$$

Orthogonalité des solutions de l'équation de Helmholtz pour les problèmes aux limites intérieur ou extérieur axi-symétriques, coordonnées sphéroïdales aplaties

Pour un problème du type :

$$\delta\Omega \ limite\, du\, domaine \quad \alpha\frac{\partial T(\eta,\theta,t)}{\partial n}+\beta\, T(\eta,\theta,t)\Big|_{\delta\Omega}=0 \qquad T(\eta,\theta,t)\big|_{t=0}=T_0(\eta,\theta)=f(u,v)$$

Reprenons les équations différentielles précédente pour chaque variable, notamment u, avec deux valeurs propres distinctes et leurs solutions respectives :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\frac{\partial H_1(u)}{\partial u}\right)-\left(\lambda_1-\mu_1{}^2c^2\left(1+u^2\right)\right)H_1(u)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)-\left(\lambda_2-\mu_2{}^2c^2\left(1+u^2\right)\right)H_2(u)=0$$

Il n'est pas possible d'établir une quelconque relation d'orthogonalité sur ces deux solutions à partir de ces deux équations différentielles. Et il en serait de même avec les fonctions de la variable v. En revanche en remontant à l'étape avant la séparation spatiale, on peut établir une relation d'orthogonalité bi-dimensionnelle, comme suit à partir des deux équations de Helmoltz avec des valeurs propres différentes. Il vient par multiplication du produit croisé des fonctions :

$$\begin{cases}\Theta_1(v)\Theta_2(v)H_2(u)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\dfrac{\partial H_1(u)}{\partial u}\right)+H_1(u)H_2(u)\Theta_2(v)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}\right)+\\ +\mu_1{}^2c^2\left(u^2+v^2\right)H_1(u)\Theta_1(v)H_2(u)\Theta_2(v)=0\\ \Theta_1(v)\Theta_2(v)H_1(u)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\dfrac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)+H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\dfrac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)+\\ +\mu_2{}^2c^2\left(u^2+v^2\right)H_2(u)\Theta_2(v)H_1(u)\Theta_1(v)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\Theta_1(v)\Theta_2(v)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\left(H_2(u)\dfrac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\dfrac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right)+\\ H_1(u)H_2(u)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\dfrac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\dfrac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right)+\\ +c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\left(u^2+v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)=0\end{array}\right\}$$

Une double intégration spatiale sur le domaine étudié donne :

$$\int_{u_{\min}}^{u_{\max}}du\int_{-1}^{+1}dv\left\{\begin{array}{l}\Theta_1(v)\Theta_2(v)\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\left(H_2(u)\dfrac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\dfrac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right)+\\ H_1(u)H_2(u)\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\dfrac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\dfrac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right)\end{array}\right\}=$$
$$=-c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\int_{u_{\min}}^{u_{\max}}du\int_{-1}^{+1}dv\left(u^2+v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)$$

Soit en intégrant sur les bornes du domaine pour chaque variable :

$$\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\left(H_2(u)\frac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right)\int_{-1}^{+1} dv\Theta_1(v)\Theta_2(v)+$$

$$+\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} duH_1(u)H_2(u)\int_{-1}^{+1} dv\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\frac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\frac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right)=$$

$$=-c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\int_{-1}^{+1} dv\left(u^2+v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)$$

$$\Rightarrow\left[\left(1+u^2\right)\left(H_2(u)\frac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right]_{u_{\min}}^{u_{\max}}\int_{-1}^{+1} dv\Theta_1(v)\Theta_2(v)+$$

$$+\left[\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\frac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\frac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right]_{-1}^{+1}\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} duH_1(u)H_2(u)=$$

$$=-c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\int_{-1}^{+1} dv\left(u^2+v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)$$

$$Comme\quad\left[\left(1-v^2\right)\left(\Theta_2(v)\frac{\partial\Theta_1(v)}{\partial v}-\Theta_1(v)\frac{\partial\Theta_2(v)}{\partial v}\right)\right]_{-1}^{+1}=0$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\left(1+u^2\right)\left(H_2(u)\frac{\partial H_1(u)}{\partial u}-H_1(u)\frac{\partial H_2(u)}{\partial u}\right)\right]_{u_{\min}}^{u_{\max}}\int_{-1}^{+1} dv\Theta_1(v)\Theta_2(v)\\=-c^2\left(\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\right)\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\int_{-1}^{+1} dv\left(u^2+v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)\end{array}\right\}$$

Comme on le voit, sur le domaine angulaire le terme s'annule. Il en serait de même s'il s'agissait d'un secteur angulaire en raison des conditions aux limites imposées sur les bords du domaine, de type Dirichlet, Neumann ou Robin. Sur le domaine radial, si les limites sont finies, alors le terme s'annule sans ambiguïté en raison des conditions aux limites homogènes imposées (Dirichlet, Neumann ou Robin). Si la limite radiale est η=0, alors u=Sinh(η)=0 or l'on sait que la régularité du gradient en coordonnées sphéroïdales aplaties pour les solutions impose au moins l'annulation de ces dernières en zéro (c'est une condition nécessaire de régularité du gradient) alors le terme radial lui aussi s'annule . Si le problème est extérieur alors les fonctions sont également contraintes à s'annuler à l'infini et le terme s'annule également. Donc il vient la relation d'orthogonalité bidimensionnelle suivantes :

$$Si\quad\mu_1\neq\mu_2\Rightarrow\mu_1{}^2-\mu_2{}^2\neq 0\quad u=Sinh(\eta)\quad v=Cos(\vartheta)$$

$$\Rightarrow\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\int_{-1}^{+1} dv\left(u^2+v^2\right)H_1(u)H_2(u)\Theta_1(v)\Theta_2(v)=0$$

Orthogonalité des solutions de l'équation de Helmholtz pour les problèmes aux limites intérieur ou extérieur axi-symétriques avec la solution de valeur propre nulle dans le cas du problème de Neumann, coordonnées sphéroïdales aplaties

Le problème aux limites de Neumann sur la partie radiale admet la solution de valeur propre nulle comme solution. Il s'agit évidemment de la solution triviale constante :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\left(1+u^2\right)\frac{\partial H_0(u)}{\partial u}\right)-\left(\lambda_0-\mu_0{}^2c^2\left(1+u^2\right)\right)H_0(u)=0$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\left(1-v^2\right)\frac{\partial \Theta_0(v)}{\partial v}\right)+\left(\lambda_0-\mu_0{}^2c^2\left(1-v^2\right)\right)\Theta_0(v)=0$$
$$H_0(u)=Cste \quad \Theta_0(v)=Cste \quad \lambda_0=\mu_0=0$$

Dans ces conditions on peut conclure qu'il y a bien orthogonalité des solutions avec la solution de de valeur propre nulle, soit que l'intégrale suivante doit obligatoirement s'annuler :

$$Si \quad \mu_1 \neq 0 \quad u=Cosh(\eta) \quad v=Cos(\vartheta)$$
$$\Rightarrow \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \int_{-1}^{+1} dv\left(u^2+v^2\right)H_1(u)\Theta_1(v)=0$$
$$\Rightarrow \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du\, u^2 H_1(u)\int_{-1}^{+1} dv\,\Theta_1(v)+\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du H_1(u)\int_{-1}^{+1} dv\, v^2\Theta_1(v)=0$$

Conséquence de l'orthogonalité des solutions du problèmes aux limites, coordonnées sphéroïdales aplaties

En supposant qu'il existe bien un jeu discret et infini de valeurs propres solutions du problème aux limites homogènes bidimensionnel, et en indiçant le jeu de fonctions propres correspondantes, on peut écrire la solution du problème aux limites sous la forme d'une série :

$$T(\eta,\vartheta)=T(u,v)=\sum_{n=1}^{n=+\infty} A_n H_n(u)\Theta_n(v) \qquad tq \quad A_n=\frac{\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \int_{-1}^{+1} dv\left(u^2+v^2\right)f(u,v)H_n(u)\Theta_n(v)}{\int_{u_{\min}}^{u_{\max}} du \int_{-1}^{+1} dv\left(u^2+v^2\right)\left(H_n(u)\right)^2\left(\Theta_n(v)\right)^2}$$

Contrainte de régularité du gradient à l'origine des coordonnées sphéroïdales aplaties

La contrainte de régularité du gradient s'applique également aux solutions du problème de diffusion, tout comme le problème de Laplace, dès lors que l'origine des coordonnées est incluse dans le domaine d'étude. Cela veut dire que les solutions doivent respecter à l'origine des coordonnées les formes suivantes, indépendamment du temps :

$$\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi,t)}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi,t)}{\partial \theta}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}} \propto Cste\left(Cosh^2(\eta)-Sin^2(\theta)\right) \quad et \quad \left(\frac{\partial T(\eta,\theta,\phi,t)}{\partial \phi}\right)^2\Bigg|_{\substack{\eta=0\\ \theta=0,\pi}} \propto Cste\, Cosh^2(\eta)Sin^2(\theta)$$

On a vu que pour le problème stationnaire de Laplace, les seules solutions que sont les fonctions de Legendre associées $P_n(iSinh(\eta))$ respectent cette contrainte. Les fonctions de Legendre associées $Q_n(iSinh(\eta))$ certes ne divergent pas à l'origine, mais la non annulation du gradient à l'origine des coordonnées les disqualifie . Pour ce qui des solutions de l'équation de Helmholtz, il en est de même.

Pour la dimension radiale et angulaire, les solutions séparées du problème de diffusion sont des fonctions sphéroïdales radiales et angulaires de première et deuxième espèce. Je prendrais pour ces dernières un mixte des notations de NIST Handbook of Mathematical Functions, Chapitre 30 "Spheroidal Wave Functions » et de celle données par l'un des ouvrages de référence sur ces fonctions de « J.Meixner.F.W.Schafke , Sphaeroid funktionen » (en allemand).

On notera $\gamma^2 = c^2\mu^2$ *pour le paramètre dit de « sphéroïdicité », et les fonctions s'écrivent :*

$$\begin{cases} H(\eta)=\begin{cases} A\, S_n^{(1),m}\left(iSinh(\eta),-\gamma^2\right)+B\, S_n^{(2),m}\left(iSinh(\eta),-\gamma^2\right) \\ A\, Ps_n^m\left(iSinh(\eta),-\gamma^2\right)+B\, Qs_n^m\left(iSinh(\eta),-\gamma^2\right) \end{cases} & fonctions\ sphéroïdales\ radiales \\ \Theta(v)=C\ ps_n^m\left(Cos(\theta),-\gamma^2\right)+D\ qs_n^m\left(Cos(\theta),-\gamma^2\right) & fonctions\ sphéroïdales\ angulaires \\ \Psi(\varphi)=E\ Cos(m\varphi)+F\ Sin(m\varphi) \end{cases}$$

L'équation différentielles des fonctions radiales et angulaires est la même :

$$\left(\left(1-x^2\right)y'(x)\right)'+\left(\lambda-\gamma^2\left(1-x^2\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y'(x)=0$$

Dans un problème où le sphéroïde est complet alors m est un paramètre entier. Dans ce cas la valeur caractéristique λ est une fonction « infiniment multi-valuée » dont chaque « branche » (indexée par le paramètre d'ordre n entier) dépend continuement de la « sphéroïdicité » γ. Pour se figurer « l'origine » de cet ordre n, il suffit de considérer la valeur caractéristique λ lorsque γ=0 : $\lambda = n(n+1)$*, sachant que l'on reconnaît le paramètre usuel dans l'équation de Legendre. Si le sphéroïde n'est pas complet alors m n'est plus nécessairement un entier, on le note souvent μ et dans ce cas le paramètre n généré par la limite γ=0 n'est plus un entier, on le note communément ν . Les fonctions se notent alors :* $\begin{cases} x \in [1,+\infty] & \begin{cases} S_\nu^{(1),\mu}(i\,x,-\gamma^2), S_\nu^{(2),\mu}(i\,x,-\gamma^2) \\ Ps_\nu^{\mu}(i\,x,-\gamma^2), Qs_\nu^{\mu}(i\,x,-\gamma^2) \end{cases} \\ x \in [-1,+1] & ps_\nu^{\mu}(x,-\gamma^2), qs_\nu^{\mu}(x,-\gamma^2) \end{cases}$

Pour les fonctions radiales, les deux formes sont équivalentes l'une avec des fonctions S dont le développement est réalisé à l'aide de fonctions de Bessel sphériques, et l'autre avec des fonctions associées de Legendre sur l'intervalle [1,+∞) (soit de type 3 selon Mathematica par exemple). Ces deux types de fonctions sont reliées par un constante appelée facteur de jointure :

$$S_n^{(1),m}(x,\gamma^2) = K_n^{(1),m}(-\gamma^2)\, Ps_n^m(i\,Sinh(\eta),-\gamma^2) \qquad S_n^{(2),m}(x,-\gamma^2) = K_n^{(2),m}(-\gamma^2)\, Qs_n^m(i\,Sinh(\eta),-\gamma^2)$$

La caractéristique importante des fonctions sphéroïdales angulaires comme radiales est qu'elles se développent à l'aide des fonctions associées de Legendre :

$$x \in [-1,+1] \quad \begin{cases} ps_n^m(x,-\gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k a_{n,k}^m(-\gamma^2)\, P_{n+2k}^m(x) \\ qs_n^m(x,-\gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k a_{n,k}^m(-\gamma^2)\, Q_{n+2k}^m(x) \end{cases}$$

$$x \in [1,+\infty] \quad \begin{cases} Ps_n^m(x,-\gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k a_{n,k}^m(-\gamma^2)\, P_{n+2k}^m(x) \\ Qs_n^m(x,-\gamma^2) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} (-1)^k a_{n,k}^m(-\gamma^2)\, Q_{n+2k}^m(x) \end{cases}$$

Dès lors on peut utiliser ces développements pour écarter les fonctions sphéroïdales de deuxième espèce pour répondre à la contrainte de régularité du gradient, du simple fait que ses composantes Q ne respectent pas le critère de la régularité du gradient à l'origine. Pour la même raison la fonction sphéroïdale de première espèce répond à la contrainte de régularité du gradient car chacune de ses composantes P fonctions de Legendre associées de première espèce assure cette régularité.

Dans un problème de diffusion intérieur les fonctions compatibles sont donc :

$$ps_n^m\left(Cos(\vartheta),-\gamma^2\right) \qquad Ps_n^m\left(i\ Sinh(\eta),-\gamma^2\right) \quad ou \quad S_n^{(1),m}\left(i\ Sinh(\eta),-\gamma^2\right)$$

Si les conditions aux limites et la condition initiale n'a pas de dépendance azimutale φ, alors seule la valeur m=0 sera utilisée, soit le jeu de fonctions :

$$ps_n^0\left(Cos(\vartheta),-\gamma^2\right) \qquad Ps_n^0\left(i\ Sinh(\eta),-\gamma^2\right) \quad ou \quad S_n^{(1),0}\left(i\ Sinh(\eta),-\gamma^2\right)$$

<u>Problème de Dirichlet : refroidissement ou réchauffement intérieur sans dépendance azimutale, coordonnées sphéroïdales aplaties</u>

$$Refroidissement \quad \begin{cases} T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta} = 0 \\ T_t(\eta,\theta,t)\big|_{t=0} = T_0 \end{cases} \qquad Réchauffement \quad \begin{cases} T(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta} = T_0 \quad T(\eta,\theta,t)\big|_{t=0} = 0 \\ T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta} = 0 \quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{t=0} = T_0 \\ T(\eta,\theta,t) = T_0 - T_t(\eta,\theta,t) \end{cases}$$

$$n \in \mathbf{N} \Rightarrow ps_n^0\left(Cos(\theta),-\gamma_{n,l}{}^2\right) \quad fonction\ régulière\ sur\ [-1,+1] \quad \underset{x\to 1,-1}{Lim}\ qs_n^0\left(x,-\gamma^2\right) = \infty$$

$$\begin{cases} S_n^{(1),0}\left(i\ Sinh(\eta),-\gamma^2\right) \\ S_n^{(2),0}\left(iSinh(\eta),-\gamma^2\right) \end{cases} \quad fini \Leftarrow Régularité\ du\ gradient \Rightarrow S_n^{(1),0}\left(iSinh(\eta),-\gamma^2\right) ps_n^0\left(Cos(\theta),-\gamma^2\right)$$

$$T_t(\eta,\theta,t) = \sum_{n=0}^{n=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty} A_{n,l} S_n^{(1),0}\left(iSinh(\eta),-\gamma_{n,l}{}^2\right) ps_n^0\left(Cos(\theta),-\gamma_{n,l}{}^2\right) e^{-\delta\frac{\gamma_{n,l}{}^2}{c^2}t} \qquad \mu_{n,l} \quad tq \quad S_n^{(1),0}\left(iSinh(l_\eta),-\gamma_{n,l}{}^2\right) = 0$$

De la relation d'orthogonalité on tire la valeur des coefficients :

$$A_{n,l} = \frac{\int_1^{Sinh(l_\eta)} du\ S_n^{(1),0}\left(i\ u,-\gamma_{n,l}{}^2\right)\int_{-1}^{+1} dv\ \left(u^2+v^2\right) ps_n^0\left(v,-\gamma_{n,l}{}^2\right)}{\int_1^{Sinh(l_\eta)} du\ \left(S_n^{(1),0}\left(i\ u,-\gamma_{n,l}{}^2\right)\right)^2\int_{-1}^{+1} dv\ \left(u^2+v^2\right)\left(ps_n^0\left(v,-\gamma_{n,l}{}^2\right)\right)^2} \qquad \gamma_{n,l} \quad tq \quad S_n^{(1),0}\left(i\ Sinh(l_\eta),-\gamma_{n,l}{}^2\right) = 0$$

$$T_t(\eta,\theta,t) = \sum_{n=0}^{n=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty} A_{n,l} S_n^{(1),0}\left(i\ Sinh(\eta),-\gamma_{n,l}{}^2\right) ps_n^0\left(Cos(\theta),-\gamma_{n,l}{}^2\right)\ e^{-\delta\frac{\gamma_{n,l}{}^2}{c^2}t}$$

Par ailleurs, la condition initiale étant une constante, seule les fonctions propres doivent contribuer au développement en série. Ce que l'on peut aisément voir par l'annulation des coefficients pour n impaire, du fait de l'imparité des fonctions sphéroïdales d'ordre impair:

$$ps_{2n+1}^0\left(v,-\gamma_{2n+1,l}{}^2\right) \quad impaire\ en\ v \Rightarrow \int_{-1}^{+1} dv\ ps_{2n+1}^0\left(v,-\gamma_{2n+1,l}{}^2\right) = \int_{-1}^{+1} dv\ v^2\, ps_{2n+1}^0\left(v,-\gamma_{2n+1,l}{}^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \int_1^{Sinh(l_\eta)} du\ S_{2n+1}^{(1),0}\left(i\ u,-\gamma_{n,l}{}^2\right)\int_{-1}^{+1} dv\left(u^2-v^2\right) ps_n^0\left(v,\gamma_{2n+1,l}{}^2\right) = 0 \Rightarrow A_{2n+1,l}$$

$$T_t(\eta,\theta,t) = \sum_{n=0}^{n=+\infty}\sum_{l=1}^{l=+\infty} A_{2n,l} S_{2n}^{(1),0}\left(i\ Sinh(\eta),-\gamma_{2n,l}{}^2\right) ps_{2n}^0\left(Cos(\theta),-\gamma_{2n,l}{}^2\right)\ e^{-\delta\frac{\gamma_{2n,l}{}^2}{c^2}t}$$

à finir

Problème de Dirichlet : refroidissement ou réchauffement extérieur sans dépendance azimutale, coordonnées sphéroïdales aplaties

$$Refroidissement \quad \begin{cases} T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta} = 0 \\ T_t(\eta,\theta,t)\big|_{t=0} = T_0 \end{cases} \quad Réchauffement \quad \begin{cases} T(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta} = T_0 \quad T(\eta,\theta,t)\big|_{t=0} = 0 \quad T(\eta,\theta,t) = T_s(\eta,\theta) + T_t(\eta,\theta,t) \\ T_t(\eta,\theta,t)\big|_{\eta=l_\eta} = 0 \quad T_t(\eta,\theta,t)\big|_{t=0} = -T_0 \dfrac{ArcCotan(\eta)}{ArcCotan(l_\eta)} \end{cases}$$

$$n \in \mathbf{N} \Rightarrow ps_n^0\left(Cos(\theta), -c^2\mu_{n,l}{}^2\right) \quad fonction\ régulière\ sur\ [-1,+1] \quad \lim_{x\to 1,-1} qs_n^0\left(x, -c^2\mu^2\right) = \infty$$

$$Cas\ limite\ l_\eta = 0 \quad disque\ de\ rayon\ c \Rightarrow Application\ de\ la\ régularité\ du\ gradient$$

$$\begin{cases} S_n^{0(1)}\left(iSinh(\eta), -c^2\mu^2\right) \\ S_n^{0(2)}\left(iSinh(\eta), -c^2\mu^2\right) \end{cases} \quad fini \quad Régularité\ du\ gradient \Rightarrow S_n^{(1),0}\left(iSinh(\eta), -c^2\mu^2\right) ps_n^0\left(Cos(\theta), -c^2\mu^2\right)$$

$$Notation \quad \gamma^2 = c^2\mu^2 \Rightarrow \mu^2 = \frac{\gamma^2}{c^2} \qquad T_s(\eta,\theta) = T_0 \frac{Q_0(iSinh(\eta))}{Q_0(iSinh(l_\eta))} = T_0 \frac{ArcCotan(\eta)}{ArcCotan(l_\eta)}$$

$$Si\ l_\eta = 0 \quad ArcCotan(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T_s(\eta,\theta) = T_0 \frac{2}{\pi} ArcCotan(\eta)$$

$$\begin{cases} T_t(\eta,\theta,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \sum_{l=1}^{l=+\infty} A_{n,l} S_n^{0(1)}\left(iSinh(\eta), -\gamma_{n,l}{}^2\right) ps_n^0\left(Cos(\theta), -\gamma_{n,l}{}^2\right) e^{-\delta \frac{\gamma_{n,l}{}^2}{c^2} t} \quad \gamma_{n,l} \quad tq \quad S_n^{0(1)}\left(iSinh(l_\eta), -\gamma_{n,l}{}^2\right) = 0 \\ T(\eta,\theta,t) = T_0 \dfrac{ArcCotan(\eta)}{ArcCotan(l_\eta)} + T_t(\eta,\theta,t) \end{cases}$$

à finir